

TÓM TẮT LÝ THUYẾT VÀ BÀI TẬP TOÁN 10

1. Mệnh đề.

- . Một khẳng định hoặc đúng hoặc sai, không thể vừa đúng vừa sai gọi là một mệnh đề.
- . Một mệnh đề còn phụ thuộc vào những giá trị của biến số gọi là mệnh đề chứa biến. Mệnh đề chứa biến x kí hiệu là: $P(x)$.
- . Mệnh đề “không phải P” là mệnh đề phủ định của mệnh đề P và kí hiệu là \bar{P} .
- . Mệnh đề “Nếu P thì Q” được gọi là mệnh đề kéo theo và kí hiệu là: $P \Rightarrow Q$. Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ chỉ sai khi P đúng và Q sai.
- . Định lí là một mệnh đề đúng và thường có dạng $P \Rightarrow Q$.
- . Mệnh đề $Q \Rightarrow P$ được gọi là mệnh đề đảo của mệnh đề $P \Rightarrow Q$.
- . Nếu cả hai mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ đều đúng ta nói P và Q là hai mệnh đề tương đương. Khi đó ta kí hiệu $P \Leftrightarrow Q$ và đọc là: P tương đương Q hoặc P là điều kiện cần và đủ để có Q, hoặc P khi và chỉ khi Q.
- . Kí hiệu \forall đọc là “với mọi”, nghĩa là tất cả.
- . Kí hiệu \exists đọc là “có một” (tồn tại một) hay “có ít nhất một”.

2. Tập hợp.

- . Tập hợp là một khái niệm cơ bản của toán học. Để chỉ a là một phần tử của tập hợp A, ta viết $a \in A$ (đọc là a thuộc A). Để chỉ a không phải là một phần tử của tập hợp A, ta viết $a \notin A$ (đọc là a không thuộc A). Tập hợp rỗng kí hiệu là Φ tập hợp không chứa phần tử nào.
- . Nếu mọi phần tử của A đều là phần tử của B thì ta nói A là một tập hợp con của B và viết $A \subset B$ (đọc là A chứa trong B).
- . Khi $A \subset B$ và $B \subset A$ ta nói tập A bằng tập B và viết là: $A = B$. Như vậy $A = B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$.
- . Tập hợp C gồm các phần tử vừa thuộc A, vừa thuộc B được gọi là giao của A và B

$$A \cap B = \{x / x \in A \text{ và } x \in B\}; x \in A \cap B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B \end{cases}$$

2. Các số đặc trưng.

* Số trung bình: $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N}$ hay $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$.

Đối với bảng phân bố tần số ta có: $\bar{x} = \frac{n_1 x_1 + \dots + n_m x_m}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^m n_i x_i$

Số trung bình dùng làm đại diện cho mẫu số liệu.

* Số trung vị: Giả sử ta có một mẫu gồm N số liệu được sắp xếp theo thứ tự không giảm. Nếu N là một số lẻ thì số liệu đứng thứ $\frac{N+1}{2}$ (số liệu đứng chính giữa) gọi là số trung vị. Nếu N là số

chẵn, ta lấy số trung bình cộng của hai số liệu đứng thứ $\frac{N}{2}$ và $\frac{N}{2} + 1$ làm số trung vị. Số trung vị được kí hiệu là m.

* Mốt: Cho một mẫu số liệu dưới dạng bảng phân bố tần số. Giá trị có tần số lớn nhất được gọi là mốt của mẫu số liệu và kí hiệu là m_0 .

* Phương sai: Để đo mức độ biến động, chênh lệch giữa các giá trị của dấu hiệu, người ta đưa ra một chỉ tiêu gọi là phương sai.

Giả sử có một mẫu số liệu kích thước N là $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$. Phương sai của mẫu số liệu này, kí hiệu là s^2 , được tính bởi công thức sau:

$$s^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \text{ trong đó } \bar{x} \text{ là số trung bình của mẫu số liệu.}$$

Hay

$$s^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 - \frac{1}{N^2} \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2$$

* **Độ lệch chuẩn:** Căn bậc hai của phương sai được gọi là độ lệch chuẩn, kí hiệu là s . Ta có:

$$s = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$$

$$s^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^m n_i x_i^2 - \frac{1}{N^2} \left(\sum_{i=1}^m n_i x_i \right)^2$$

1. Góc và cung lượng giác.

* Cung tròn có số đo bằng $\frac{1}{360}$ số đo của đường tròn gọi là 1 độ và kí hiệu : 1° . Cung tròn có độ dài bằng bán kính gọi là cung có số đo 1 radian, gọi tắt là cung 1 radian.

* Góc lượng giác là góc được gắn với đường tròn lượng giác có nghĩa là có chiều dương, chiều âm và độ lớn tùy ý. Hai góc lượng giác có chung tia đầu và tia cuối có dạng α và $\alpha + k2\pi$.

* Cho đường tròn lượng giác gốc A , góc α có tia cuối là OM . Khi đó tung độ của M gọi là $\sin \alpha$, hoành độ của M gọi là $\cos \alpha$, tỉ số $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ gọi là tang α , kí hiệu : $\tan \alpha$, tỉ số $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ gọi là cotang α , kí hiệu : $\cot \alpha$

Ta có : $-1 \leq \sin \alpha, \cos \alpha \leq 1$; $\cos(\alpha + k2\pi) = \cos \alpha$; $\sin(\alpha + k2\pi) = \sin \alpha$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 ; \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1 ; 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} ; 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

2. Giá trị lượng giác của những góc có liên quan đặc biệt.

* Hai góc đối nhau thì có cosin bằng nhau còn các giá trị khác đối nhau.

* Hai góc bù nhau thì có sin bằng nhau còn các giá trị khác đối nhau.

* Hai góc hơn kém nhau π thì có sin và cosin đối nhau còn các giá trị khác bằng nhau.

* Hai góc phụ nhau thì có cosin góc này bằng sin góc kia, tan góc này bằng cot góc kia.

3. Công thức lượng giác.

* **Công thức cộng.**

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

* **Công thức nhân đôi.**

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

*** Công thức hạ bậc.**

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} ; \quad \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

*** Công thức biến đổi tổng thành tích.**

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]$$

*** Công thức biến đổi tổng thành tích.**

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} ; \quad \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} ; \quad \sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

B. BÀI TẬP.

1. a) Cho $\sin \alpha = \frac{3}{5}$; và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Cho Tính $\cos \alpha$, $\tan \alpha$, $\cot \alpha$.
 b) Cho $\tan \alpha = 2$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ Tính $\sin \alpha$, $\cos \alpha$.
2. a) Cho $\cos \alpha = -\frac{12}{13}$; và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\tan 2\alpha$, $\cot 2\alpha$
 b) Cho $\cot \alpha = 2$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$. Tính $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\tan 2\alpha$, $\cot 2\alpha$.
 c) Cho $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{5}$. Tính $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$.
3. a) Cho $\sin \alpha = -\frac{5}{9}$; và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $\sin \frac{\alpha}{2}$, $\cos \frac{\alpha}{2}$, $\tan \frac{\alpha}{2}$, $\cot \frac{\alpha}{2}$.
 b) Cho $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ và $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Tính $\sin \frac{\alpha}{2}$, $\cos \frac{\alpha}{2}$, $\tan \frac{\alpha}{2}$, $\cot \frac{\alpha}{2}$.
4. Không sử dụng máy tính hãy tính
 a) $\sin 75^\circ$ b) $\tan 105^\circ$ c) $\cos(-15^\circ)$
 d) $\sin \frac{\pi}{12}$ e) $\cos \frac{22\pi}{3}$ f) $\sin \frac{23\pi}{4}$

5: Rút gọn các biểu thức:

$$a) A = \frac{\cos 2a - \cos 4a}{\sin 4a + \sin 2a}$$

$$b) B = \frac{2 \sin 2a - \sin 4a}{2 \sin 2a + \sin 4a}$$

$$c) C = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - a\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} - a\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - a\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} - a\right)}$$

$$d) D = \frac{\sin a - \sin 3a}{2 \cos 4a}$$

6. Chứng minh rằng:

$$a) (1 + \tan \alpha) \sin^3 \alpha + (1 + \tan \alpha) \cos^3 \alpha = \sin \alpha + \cos \alpha$$

$$b) \frac{\sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha - 1}{\cot^2 \alpha} = \sin^2 \alpha$$

$$c) \frac{\sin^2 \alpha - \tan^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - \cot^2 \alpha} = \tan^6 \alpha$$

$$d) (\cot \alpha + \tan \alpha)^2 - (\cot \alpha - \tan \alpha)^2 = 4$$

$$e) \cos 4\alpha - \sin 4\alpha = 1 - 2 \sin 2\alpha$$

$$f) \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{\tan \alpha - 1}{\tan \alpha + 1}$$

$$g) \frac{\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = 1 - \sin \alpha \cos \alpha$$

$$h) \frac{4 \sin^2 \alpha}{1 - \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = 16 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$k) \frac{1 + \cos \alpha - \sin \alpha}{1 - \cos \alpha - \sin \alpha} = -\cot \frac{\alpha}{2}$$

$$l) \frac{\sin 2\alpha + \sin \alpha}{1 + \cos 2\alpha + \cos \alpha} = \tan \alpha$$

7. Chứng minh rằng trong tam giác ABC ta có:

$$a) \sin(A + B) = \sin C$$

$$b) \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) = \cos \frac{C}{2}$$

8. Tiến hành một cuộc thăm dò về số giờ tự học của học sinh lớp 10 ở nhà. Người điều tra chọn ngẫu nhiên 50 học sinh lớp 10 và đề nghị các em cho biết số giờ tự học ở nhà trong 10 ngày. Mẫu số liệu được trình bày dưới dạng bảng phân bố tần số ghép lớp sau đây

Lớp	Tần số
[0; 10)	5
[10; 20)	9
[20; 30)	15
[30; 40)	10
[40; 50)	9
[50; 60]	2
Cộng	$N = 50$

a) Lập bảng phân bố tần số, tần suất ghép lớp.

b) Tính phương sai của mẫu số liệu trên (Lấy gần đúng 3 chữ số thập phân).

c) Vẽ hai biểu đồ hình cột biểu diễn phân bố tần số, tần suất.

9. Cho bảng phân bố tần số khối lượng 30 quả trứng gà của một rổ trứng gà :

Khối lượng (g)	Tần số
25	3
30	5
35	7
40	9
45	4
50	2
Cộng	30

- Lập bảng phân bố tần suất.
- Vẽ biểu đồ tần số hình cột, đường gấp khúc tần số và biểu đồ tần suất hình quạt.
- Tìm số trung bình cộng, số trung vị, mốt của mẫu số liệu
- Tính phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu.