TÓM TẮT KIẾN THỨC ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH 12

I.Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên D, với D là một khoảng, một đoạn hoặc nửa khoảng.

1.Hàm số $y = f(x)$ được gọi là đồng biến trên D nếu $\forall x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

2.Hàm số $y = f(x)$ được gọi là nghịch biến trên D nếu $\forall x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

II.Điều kiện cần để hàm số đơn điệu: Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng D

1.Nếu hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên D thì $f'(x) \geq 0, \forall x \in D$

2.Nếu hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên D thì $f'(x) \leq 0, \forall x \in D$

III.Điều kiện đủ để hàm số đơn điệu:

1.Định lý 1. Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a,b]$ và có đạo hàm trên khoảng (a,b) thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a,b)$ sao cho: $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$

2.Định lý 2. Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng D

1.Nếu $f'(x) \geq 0, \forall x \in D$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm thuộc D thì hàm số đồng biến trên D

2.Nếu $f'(x) \leq 0, \forall x \in D$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm thuộc D thì hàm số nghịch biến trên D

3.Nếu $f'(x) = 0, \forall x \in D$ thì hàm số không đổi trên D

PHẦN II. MỘT SỐ DẠNG TOÁN

Dạng 1*.Xét chiều biến thiên của hàm số* $y = f(x)$

****Phương pháp : Xét chiều biến thiên của hàm số*** $y = f(x)$

1.Tìm tập xác định của hàm số $y = f(x)$

2.Tính $y' = f'(x)$ *và xét dấu y' (Giải phương trình y' = 0)*

3.Lập bảng biến thiên

4.Kết luận

Dạng 2*. Tìm điều kiện của tham số để hàm số đơn điệu trên một khoảng cho trước .*

Dạng 3*. Sử dụng tính đơn điệu để giải PT,BPT,BĐT*

Chủ đề 2. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

I.Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $D \subset R$ và $x_0 \in D$

1. x_0 được gọi là một điểm cực đại của hàm số $y = f(x)$ nếu tồn tại một (a,b) chứa điểm x_0 sao cho $(a,b) \subset D$ và $f(x) < f(x_0), \forall x \in (a,b) \setminus \{x_0\}$. Khi đó $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực đại của hàm số và $M(x_0; f(x_0))$ được gọi là điểm cực đại của hàm số .

2. x_0 được gọi là một điểm cực tiểu của hàm số $y = f(x)$ nếu tồn tại một (a,b) chứa điểm x_0 sao cho $(a,b) \subset D$ và $f(x) > f(x_0), \forall x \in (a,b) \setminus \{x_0\}$. Khi đó $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực tiểu của hàm số và $M(x_0; f(x_0))$ được gọi là điểm cực tiểu của hàm số .

3.Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là cực trị của hàm số

II.Điều kiện cần để hàm số có cực trị : Giả sử hàm số $y = f(x)$ có cực trị tại x_0.Khi đó, nếu $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

III.Điều kiện đủ để hàm số có cực trị :

1.Định lý 1. (Dấu hiệu 1 để tìm cực trị của hàm số)

Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng (a,b) chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên các khoảng (a, x_0) và (x_0, b). Khi đó :

+ Nếu f'(x) đổi dấu từ âm sang dương khi x qua điểm x_0 thì hàm số đạt cực tiểu tại x_0

+ Nếu f'(x) đổi dấu từ dương sang âm khi x qua điểm x_0 thì hàm số đạt cực đại tại x_0

2.Định lý 2. (Dấu hiệu 2 để tìm cực trị của hàm số)

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng (a,b) chứa điểm x_0, $f'(x_0) = 0$ và f(x) có đạo hàm cấp hai khác 0 tại điểm x_0. Khi đó:

+ Nếu $f''(x_0) < 0$ thì hàm số đạt cực đại tại điểm x_0

+ Nếu $f''(x_0) > 0$ thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm x_0

PHẦN II. MỘT SỐ DẠNG TOÁN

Dạng 1. *Tìm cực trị của hàm số*

****Phương pháp1.* (Quy tắc 1)Tìm cực trị của hàm số** $y = f(x)$

1.Tìm tập xác định của hàm số

2.Tính $f'(x)$ và giải phương trình $f'(x) = 0$ tìm nghiệm thuộc tập xác định

3.Lập bảng biến thiên

4.Kết luận

****Phương pháp 2.* (Quy tắc 2)Tìm cực trị của hàm số** $y = f(x)$

1.Tìm tập xác định của hàm số

2.Tính $f'(x)$ và giải phương trình $f'(x) = 0$ tìm nghiệm $x_i (i = 1, 2, 3...)$ thuộc tập xác định

3.Tính $f''(x)$ và $f''(x_i)$

4.Kết luận

+Nếu $f''(x_i) < 0$ thì hàm số đạt cực đại tại điểm x_i

+Nếu $f''(x_i) > 0$ thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm x_i

Chủ đề 3. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

I.Định nghĩa*:* Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $D \subseteq R$

1.Nếu tồn tại một điểm $x_0 \in D$ sao cho $f(x) \le f(x_0), \forall x \in D$ thì số $M = f(x_0)$ được gọi là giá trị lớn nhất của hàm số f(x) trên D, ký hiệu $M = \underset{x \in D}{Max}\, f(x)$

Như vậy $M = \underset{x \in D}{Max}\, f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D,\ f(x) \le M \\ \exists x_0 \in D,\ f(x_0) = M \end{cases}$

2. Nếu tồn tại một điểm $x_0 \in D$ sao cho $f(x) \geq f(x_0), \forall x \in D$ thì số $m = f(x_0)$ được gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số f(x) trên D, ký hiệu $m = \underset{x\in D}{Min} f(x)$

Như vậy $m = \underset{x\in D}{Min} f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D, f(x) \geq m \\ \exists x_0 \in D, f(x_0) = m \end{cases}$

<u>II.Phương pháp tìm GTLN,GTNN của hàm số :</u> Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $D \subseteq R$

<u>*Bài toán 1*</u>.Nếu $D = (a,b)$ thì ta tìm GTLN,GTNN của hàm số như sau:

1.Tìm tập xác định của hàm số

2.Tính $f'(x)$ và giải phương trình $f'(x) = 0$ tìm nghiệm thuộc tập xác định

3.Lập bảng biến thiên

4.Kết luận

<u>*Bài toán 2*</u>. Nếu $D = [a,b]$ thì ta tìm GTLN,GTNN của hàm số như sau:

1.Tìm tập xác định của hàm số

2.Tính $f'(x)$ và giải phương trình $f'(x) = 0$ tìm nghiệm $x_1, x_2...$ thuộc tập xác định

3.Tính $f(a), f(x_1), f(x_2)....f(b)$

4.Kết luận: Số lớn nhất là $M = \underset{x\in[a,b]}{Max} f(x)$ và số nhỏ nhất là $m = \underset{x\in[a,b]}{Min} f(x)$

<u>*Bài toán 3*</u>.*Sử dụng các bất đẳng thức thông dụng như : Cauchy, Bunhiacốpxki, ...*

<u>*Bài toán 4*</u>.*Sử dụng điều kiện có nghiệm của phương trình, tập giá trị của hàm số*

<u>PHẦN II. MỘT SỐ DẠNG TOÁN</u>

<u>Dạng 1.</u> *Tìm GTLN, GTNN của hàm số*

<u>Dạng 2</u>.*Tìm GTLN,GTNN của hàm số có chứa tham số*

<u>Chủ đề 4.</u> **ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ**

<u>PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT</u>

<u>1.Đường tiệm cận đứng</u> .

Đường thẳng (d): $x = x_0$ được gọi là đường tiệm cận đứng của đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ nếu

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty \text{ hoặc } \lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$$

Hoặc $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$ hoặc $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$

<u>2.Đường tiệm cận ngang</u> .

Đường thẳng (d): $y = y_0$ được gọi là đường tiệm cận ngang của đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ nếu

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = y_0 \text{ hoặc } \lim_{x\to-\infty} f(x) = y_0$$

3.<u>Đường tiệm cận xiên</u> .

Đường thẳng (d) $y = ax + b (a \neq 0)$ được gọi là tiệm cận xiên của đồ thị (C) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0 \text{ hoặc } \lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$$

Chú ý: Cách tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=f(x)$

Đường thẳng (d) $y=ax+b(a\neq 0)$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=f(x)$ khi và chỉ khi

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x};b=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-ax\right] \text{ hoặc } a=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x};b=\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-ax\right]$$

PHẦN II. MỘT SỐ DẠNG TOÁN

Chủ đề 5. PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1.Bài toán 1. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ có đồ thị (C) tại một điểm .

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại $M(x_0,y_0)\in(C)$ có dang :

$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$.

Trong đó $f'(x_0)$ được gọi là hệ số góc của tiếp tuyến tại tiếp điểm $M(x_0,y_0)$.

2.Bài toán 2. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ có đồ thị (C) có hệ số góc k cho trước.

1.Gọi $M(x_0,y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến, ta có $M\in(C)\Rightarrow y_0=f(x_0)$

Phương trình tiếp tuyến có dạng $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

2.Vì hệ số góc của tiếp tuyến bằng k nên $f'(x_0)=k$, giải PT $f'(x_0)=k$ tìm được $x_0\Rightarrow y_0$

3.Kết luận .

Chú ý: Nếu hai đường thẳng song song thì hai hệ số góc bằng nhau. Nếu hai đường thẳng vuông góc thì tích hai hệ số góc bằng -1

3.Bài toán 3. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ có đồ thị (C) đi qua một điểm $A(x_A,y_A)$

1.Lập phương trình đường thẳng d đi qua điểm A với hệ số góc k.

d: $y=k(x-x_A)+y_A$ (1)

2.d là tiếp tuyến của đồ thị hàm số khi và chỉ khi hệ phương tình sao có nghiệm

$$\begin{cases} f(x)=k(x-x_A)+y_A \\ f'(x)=k \end{cases} \quad \text{(I)}$$

3.Giải hệ (I) tìm k. Thay k vào (1) để viết phương tình tiếp tuyến .