

TÀI LIỆU MÔN TOÁN LỚP 10 ĐẠI SỐ

Chương I: MỆNH ĐỀ - TẬP HỢP

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ.

1. Mệnh đề.

- . Một khẳng định hoặc đúng hoặc sai, không thể vừa đúng vừa sai gọi là một mệnh đề.
- . Một mệnh đề còn phụ thuộc vào những giá trị của biến số gọi là mệnh đề chứa biến. Mệnh đề chứa biến x kí hiệu là: $P(x)$.
- . Mệnh đề “ không phải P” là mệnh đề phủ định của mệnh đề P và kí hiệu là \bar{P} .
- . Mệnh đề “ Nếu P thì Q” được gọi là mệnh đề kéo theo và kí hiệu là: $P \Rightarrow Q$. Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ chỉ sai khi P đúng và Q sai.
- Định lí là một mệnh đề đúng và thường có dạng $P \Rightarrow Q$.
- Mệnh đề $Q \Rightarrow P$ được gọi là mệnh đề đảo của mệnh đề $P \Rightarrow Q$.
- . Nếu cả hai mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ đều đúng ta nói P và Q là hai mệnh đề tương đương. Khi đó ta kí hiệu $P \Leftrightarrow Q$ và đọc là : P tương đương Q hoặc P là điều kiện cần và đủ để có Q, hoặc P khi và chỉ khi Q.
- . Kí hiệu \forall đọc là “ với mọi “, nghĩa là tất cả.
- . Kí hiệu \exists đọc là “ có một “ (tồn tại một) hay “ có ít nhất một “.

B. BÀI TẬP

- 1/ Trong các câu sau đây, câu nào là mệnh đề, câu nào là mệnh đề chứa biến.
 - a) $2011 + 1 = 2012$
 - b) $x + 10 = 1$
 - c) $x + 2y > 0$
 - d) $5 - \sqrt{10} < 0$
- 2/ Nếu mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau và xác định xem mệnh đề phủ định đó đúng hay sai:
 - a) P: “ Phương trình $x^2 - x + 1 = 0$ có nghiệm “
 - b) Q: “ 17 là số nguyên tố “
 - c) R: “ Số 963 chia hết cho 3 “
 - d) S: “ 25 không thể biểu diễn thành tổng của hai số chính phương “
- 3/ Phát biểu mỗi mệnh đề sau, bằng cách sử dụng khái niệm “ Điều kiện cần và đủ “
 - a) Một hình chữ nhật có hai cạnh liên tiếp bằng nhau là hình vuông và ngược lại.
 - b) Một tam giác có ba đường cao bằng nhau là tam giác đều và ngược lại.
 - c) Một số có tổng các chữ số chia hết cho 3 thì chia hết cho 3 và ngược lại.
- 4/ Dùng kí hiệu \forall, \exists để viết các mệnh đề sau:
 - a) Có số tự nhiên chia hết cho 11.
 - b) Mọi số nhân với chính nó đều là số không âm.
- 5/ Lập mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau:
 - a) P: “ $\forall x \in R, 2x > x^3$ ”
 - b) Q: “ $\exists n \in N : n^2 + 1 : 4$ ”

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ.

2. Tập hợp.

- . Tập hợp là một khái niệm cơ bản của toán học. Để chỉ a là một phần tử của tập hợp A, ta viết $a \in A$ (đọc là a thuộc A). Để chỉ a không phải là một phần tử của tập hợp A, ta viết $a \notin A$ (đọc là a không thuộc A). Tập hợp rỗng kí hiệu là Φ tập hợp không chứa phần tử nào.
- . Nếu mọi phần tử của A đều là phần tử của B thì ta nói A là một tập hợp con của B và viết $A \subset B$ (đọc là A chứa trong B).

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \Rightarrow x \in B)$$
- Khi $A \subset B$ và $B \subset A$ ta nói tập A bằng tập B và viết là: $A = B$. Như vậy $A = B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$

. Tập hợp C gồm các phần tử vừa thuộc A, vừa thuộc B được gọi là giao của A và B

$$A \cap B = \{x / x \in A \text{ và } x \in B\}; x \in A \cap B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B \end{cases}$$

. Tập hợp C gồm các phần tử thuộc A hoặc thuộc B được gọi là hợp của A và B.

$$A \cup B = \{x / x \in A \text{ hoặc } x \in B\}; x \in A \cup B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B \end{cases}$$

. Tập C gồm các phần tử thuộc A nhưng không thuộc B gọi là hiệu của A và B.

$$A \setminus B = \{x / x \in A \text{ và } x \notin B\}; x \in A \setminus B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin B \end{cases}$$

B. BÀI TẬP.

1/ Hãy liệt kê các phần tử của tập hợp sau :

$$A = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ có hai chữ số và } x \text{ chia hết cho } 3\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ chia hết cho } 15\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ là số nguyên tố không lớn hơn } 17\}$$

$$D = \{x \in \mathbb{N}^* / 3 < x^2 < 30\}$$

$$E = \{x \in \mathbb{R} / (2x - x^2)(2x^2 - 3x - 2) = 0\}$$

$$F = \{x \in \mathbb{Z} / 2x^2 - 7x + 5 = 0\}$$

$$G = \{x \in \mathbb{Q} / (x - 2)(3x + 1)(x + \sqrt{2}) = 0\}$$

$$H = \{x \in \mathbb{Z} / |x| \leq 3\}$$

$$I = \{x \in \mathbb{Z} / x^2 - 3x + 2 = 0 \text{ hoặc } x^2 - 1 = 0\}$$

$$J = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + x - 2 = 0 \text{ và } x^2 + 2x - 3 = 0\}$$

2/ Xét xem hai tập sau có bằng nhau không ?

$$A = \{x \in \mathbb{R} / (x - 1)(x - 2)(x - 3) = 0\}$$

$$B = \{5, 3, 1\}$$

3/ Trong các tập sau tập nào là con tập nào ?

$$M = \{x \in \mathbb{Q} / 1 \leq x \leq 2\}; \quad N = \{x \in \mathbb{Z} / |x| \leq 2\}$$

$$P = \{x \in \mathbb{N} / x^2 + 3 = 5\}$$

4/ Xác định tất cả các tập con của các tập sau :

$$a/ A = \{a\} \quad b/ B = \{0, 1\} \quad c/ C = \{a, b, c\}$$

5/ Tìm tất cả các tập hợp X sao cho : $\{1, 2, m\} \subset X \subset \{1, m, 2, a, b, 6\}$

6/ Xác định $A \cap B, A \cup B, A \setminus B, B \setminus A$ trong các trường hợp sau :

$$a/ A = \{1, 2, 3, 5, 7, 9\}; \quad B = \{2, 4, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$b/ A = \{x \in \mathbb{N} / x \leq 20\}; \quad B = \{x \in \mathbb{N} / 10 < x < 30\}$$

7/ Xác định các tập hợp sau và biểu diễn chúng trên trục số :

$$a/ [-3; 1) \cap (0; 4] \quad b/ (-\infty; 1) \cup (-2; +\infty) \quad c/ (-2; 3) \setminus (0; 7)$$

$$d/ (-2; 3) \setminus [0; 7) \quad e/ \mathbb{R} \setminus (3; +\infty) \quad f/ \mathbb{R} \setminus (-\infty; 2]$$

8/ Xác định $A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A$:

$$a/ A = [-2; 4], B = (0; 5] \quad b/ A = (-\infty; 2], B = (0; +\infty) \quad c/ A = [-4; 0], B = (1; 3]$$

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

3. Sai số.

. Nếu a là số gần đúng của \bar{a} thì $\Delta_a = |\bar{a} - a|$ được gọi là sai số tuyệt đối của số gần đúng a.

. Nếu $\Delta_a = |\bar{a} - a| \leq h$ thì $-h \leq \bar{a} - a \leq h$ hay $a - h \leq \bar{a} \leq a + h$. Ta nói a là số gần đúng của \bar{a} với độ chính xác h, và viết là $\bar{a} = a \pm h$.

. Để quy tròn số gần đúng \bar{a} , người ta thường quy ước làm tròn đến hàng cụ thể (hàng trăm, hàng nghìn,.....). Để làm tròn đến hàng k, người ta thường quan tâm đến hàng k + 1. Nếu chữ số đó lớn hơn hoặc bằng 5 ta cộng vào chữ số k một đơn vị, nếu chữ số nhỏ hơn 5 ta giữ nguyên chữ số hàng k.

B. BÀI TẬP

- 1/ Cho số $\bar{a} = 37975421 \pm 150$. Hãy viết số quy tròn của số 975421.
 2/ Độ cao của một ngọn núi là $h = 1372,5 \pm 0,1m$. Hãy viết số quy tròn của số 1372,5.

Chương II. HÀM SỐ BẬC NHẤT VÀ BẬC HAI.

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ.

1. Khái niệm hàm số.

. Cho một tập hợp khác rỗng $D \subset \mathbb{R}$

Một hàm số f xác định trên D là một quy tắc, nhờ đó với mỗi số x luôn tìm được một số thực y duy nhất gọi là giá trị của hàm số f tại x , kí hiệu là $y = f(x)$.

. Tập D gọi là tập xác định (hay miền xác định), x gọi là biến số độc lập (hay biến số) hay đối số, y gọi là biến số phụ thuộc của hàm số f .

, Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, khi nói (G) là đồ thị của hàm số f xác định trên tập D , ta hiểu rằng:

$$M(x_0; y_0) \in (G) \Leftrightarrow x_0 \in D \text{ và } y_0 = f(x_0)$$

2. Sự biến thiên của hàm số.

Cho hàm số f xác định trên K .

Hàm số f gọi là đồng biến (hay tăng) trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Hàm số đồng biến thì đồ thị đi lên.

Hàm số f gọi là nghịch biến (hay giảm) trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$. Hàm số nghịch biến thì đồ thị đi xuống.

3. Một số tính chất cơ bản của hàm số.

Cho hàm số $y = f(x)$ với tập xác định D .

. $f(x)$ là hàm số chẵn trên $D \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D \Rightarrow -x \in D \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$

. $f(x)$ là hàm số lẻ trên $D \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D \Rightarrow -x \in D \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$

. Hàm số $y = ax + b$ ($a \neq 0$) gọi là hàm số bậc nhất. Đồ thị của nó là một đường thẳng, a gọi là hệ số góc của đường thẳng đó. Hàm số này đồng biến khi $a > 0$, nghịch biến khi $a < 0$.

. Hàm số $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) gọi là hàm số bậc hai. Đồ thị của nó là một parabol.

B. BÀI TẬP.

1. Tìm miền xác định (taập xác định) của hàm số :

a/ $y = \frac{5x^2 - 4x - 10}{x^2 + 4x - 5}$; $y = \frac{2x - 1}{1 - x}$; $y = \frac{2x + 1}{x^2 - 3x + 2}$; $y = \frac{2x + 2}{(x + 1)(x - 3)}$

b/ $y = \sqrt{x + 1} + \sqrt{5 - 3x}$; $y = \sqrt{x - 1} - \sqrt{5 - x}$; $y = \frac{x + 1}{\sqrt{x - 2}}$

c/ $y = \frac{3x}{x^2 - 4} + \sqrt{6 - x}$; $y = \frac{5 - 2x}{(2 - 3x)\sqrt{1 - 6x}}$; $y = \frac{x + \sqrt{2x - 1}}{\sqrt{x + 2}}$; $y = \frac{x}{1 - x^2} - \sqrt{-x}$;

$y = \frac{\sqrt{x - 1} + \sqrt{4 - x}}{(x - 2)(x - 3)}$; $y = \sqrt{5x + 3} + \frac{2x}{\sqrt{3 - x}}$; $y = \frac{2}{\sqrt{x + 1}} + \frac{\sqrt{x + 2}}{x^2 - 4}$

d/ $y = \sqrt{2 - x} - \sqrt{x - 2}$; $y = \sqrt{5 - x} + \frac{5x + 6}{\sqrt{x - 5}}$; ; $y = \frac{x + 1}{x^2 - 4x + 5}$;

$$y = \frac{1}{\sqrt{|1-x|}}; \quad y = \frac{1+x}{|2x+1|}; \quad y = \frac{3}{|x+1|-|x+2|}; \quad y = \frac{x^2}{|x|-3}; \quad y = \sqrt{x^2-x+2}$$

2. Xét tính chẵn lẻ của hàm số :

a/ $y = 2x + 5$; $y = -3x + 2$; $y = 1/2x - 10$ trên R

b/ $y = 2x^2$ trên $(0; +\infty)$; $y = x - 2x^2$ trên $(1/4; +\infty)$

3. Xét tính chẵn lẻ của hàm số :

a/ $y = x^2 + 1$; $y = 3x^4 - 4x^2 + 3$; $y = 4x^3 - 3x$; $y = 2x + 1$; $y = x^3 - 1$

$y = x^4 + x + 10$; $y = \frac{2}{x}$; $y = x^2 + |x|$; $y = \frac{x}{x+2}$; $y = x|x|$

b/ $y = \frac{x^2+1}{|x|}$; $y = |1-2x|-|2x+1|$; $y = \sqrt{1-x^2}$; $y = \sqrt{x+5}$; $y = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$

4. Vẽ đồ thị hàm số $y = \begin{cases} 2x-1 & \text{với } x \geq 1 \\ \frac{1}{2}x+1 & \text{với } x < 1 \end{cases}$

5. Viết phương trình $y = ax + b$ của đường thẳng :

a/ Đi qua hai điểm $A(-3;2)$, $B(5;-4)$.

b/ Đi qua $A(3;1)$ và song song với trục Ox .

Vẽ trục tọa độ và tìm phương trình của đường thẳng.

6. Xác định hàm số bậc hai $y = 2x^2 + bx + c$, biết rằng đồ thị của nó

a) Có trục đối xứng là đường thẳng $x = 1$ và cắt trục tung tại điểm $(0; 4)$.

b) Có đỉnh là $I(-1; -2)$

c) Đi qua hai điểm $A(0; -1)$, $B(4; 0)$

d) Có hoành độ đỉnh là 2 và đi qua điểm $M(1; -2)$

7. Tìm a, b, c biết rằng parabol $y = ax^2 + bx + c$ cắt trục hoành tại hai điểm $A(1;0)$, $B(-3;0)$ và có hoành độ đỉnh bằng -1 . Vẽ parabol và tìm trục đối xứng.

8. Tìm giao điểm của parabol $y = 2x^2 + 3x - 2$ với các đường thẳng

a) $y = 2x + 1$

b) $y = x - 4$

c) $y = -x - 4$

bằng cách giải phương trình và bằng đồ thị.

9. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = x^2 - 2|x| + 1$

10. Vẽ đồ thị hàm số $y = |x^2 - 6x + 5|$

Chương III. PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH.

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ.

1. Phương trình.

* Hai phương trình gọi là tương đương nếu chúng có cùng tập nghiệm.

* Phương trình (2) là hệ quả của phương trình (1) nếu tập nghiệm của (2) chứa tập nghiệm của (1).

* Cho phương trình $f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) + h(x) = h(x)$, $y = h(x)$ là một hàm số.

* Bình phương hai vế của một phương trình ta được một phương trình hệ quả.

* Đối với phương trình chứa căn ta có: $\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = [g(x)]^2 \end{cases}$

2. Phương trình bậc nhất và phương trình bậc hai.

* Phương trình $ax + b = 0$, ($a \neq 0$) có nghiệm $x = -\frac{b}{a}$.

.Nếu $a = 0$, $b = 0$ phương trình có vô số nghiệm.

.Nếu $a = 0$, $b \neq 0$ phương trình vô nghiệm.

* Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có $\Delta = b^2 - 4ac$ hoặc ($\Delta' = b'^2 - ac$) trong đó $b = 2b'$.

. Nếu $\Delta \geq 0$ phương trình có nghiệm $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ hoặc $\left(x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta'}}{a} \right)$

. Nếu $\Delta < 0$ phương trình vô nghiệm.

* Nếu x_1 và x_2 là nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ thì
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

* Nếu hai số có tổng là S và tích là P thì chúng là nghiệm của phương trình : $X^2 - SX + P = 0$

3. Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn.
$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Ta có: $D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$, $D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = cb' - c'b$, $D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac' - a'c$

$$\begin{cases} ax + by = c & (a^2 + b^2 \neq 0) \\ a'x + b'y = c' & (a'^2 + b'^2 \neq 0) \end{cases}$$

1. $D \neq 0$: Hệ có một nghiệm duy nhất $(x; y)$ trong đó $x = \frac{D_x}{D}$, $y = \frac{D_y}{D}$

2. $D = 0$:

* $D_x \neq 0$ hoặc $D_y \neq 0$: Hệ vô nghiệm

* $D_x = D_y = 0$: Hệ có vô số nghiệm, tập nghiệm của hệ là tập nghiệm của phương trình $ax + by = c$

B. BÀI TẬP

1. Giải phương trình :

$$a / (1 - x^2)(x^2 - 5x + 6) = 0;$$

$$b / \frac{4-x}{x-5} = \frac{1}{1-x};$$

$$c / \frac{x-2}{1-x} + \frac{x-3}{x+1} = \frac{x^2+4x+15}{x^2-1};$$

$$d / 1 + \frac{2}{x-2} = \frac{10}{x+3} - \frac{50}{(2-x)(x+3)};$$

$$e / \frac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{x(2-x)} = 0;$$

$$f / \frac{2}{x+2} + \frac{1}{2} = \frac{-4}{x^2+2x};$$

$$g / \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 4x + 3} = \frac{1}{1-x};$$

$$h / (x^2 - 6x - 7)^2 = 9(x^2 - 4x + 3)^2$$

2. Giải phương trình (trò chơi đố) :

$$a / |3 + 4x| = |x - 2|;$$

$$b / |2 - 3x^2| - |6 - x^2| = 0;$$

$$c / |x^2 - 5x + 4| = x + 4;$$

$$d / 4 - x + |3x^2 - 6x| = 2x - 6;$$

$$e / \left| \frac{x^2 - 4x}{x^2 + 3x + 2} \right| = 1;$$

$$f / x^2 - 5|x - 1| - 1 = 0;$$

$$g / \left| \frac{x^2 - 1}{x - 2} \right| = x;$$

$$h / \frac{|x+2| - x}{x} = 2;$$

$$i / \frac{2x-5}{|x-3|} + 1 = 0;$$

$$j / |x-1||x+2| = 4;$$

$$k / ||x-5| + 3| = 2$$

3. Giải phương trình (chờu caên thòuc) :

$$a/\sqrt{x^2 - 6x + 4} = \sqrt{4 - x};$$

$$b/1 + \sqrt{2x^2 - 3x - 5} = x;$$

$$c/\sqrt{(x+4)(x-3)} = x - 1;$$

$$d/3\sqrt{-x^2 + x + 6} + 2(2x - 1) = 0;$$

$$e/\sqrt{21 - 4x - x^2} = |x + 3|;$$

$$f/\frac{4}{\sqrt{2-x}} - \sqrt{2-x} = 2$$

4. Giải phương trình (nhặt ẩn phụ) :

$$a/x^4 - 3x^2 - 4 = 0;$$

$$b/3x^4 + 5x^2 - 2 = 0;$$

$$c/x^2 - 6x + 9 = 4\sqrt{x^2 - 6x + 6};$$

$$d/(x+5)(x-2) + 3\sqrt{x(x+3)} = 0;$$

$$e/\sqrt{2x^2 - 8x + 12} = x^2 - 4x - 6;$$

$$f/\sqrt{3x^2 + 9x - 8} = x^2 + 3x - 4;$$

$$g/\frac{x+1}{x} - 2\sqrt{\frac{x+1}{x}} = 3;$$

$$h/\sqrt{x-3} = \frac{2}{\sqrt{x-2}};$$

$$i/\sqrt{x+1} = 8 - \sqrt{3x+1};$$

$$j/\sqrt{15-x} + \sqrt{3-x} = 6$$

5. Giải phương trình bậc nhất theo tham số m :

$$a/m(x-m) = x + m - 2;$$

$$b/m^2(x-1) + m = x(3m-2);$$

$$c/(m^2+2)x - 2m = x - 3;$$

$$d/m(x-m+3) = m(x-2) + 6$$

6. Giải phương trình bậc nhất có mẫu số theo tham số m :

$$a/\frac{(2m-1)x+2}{x-2} = m+1;$$

$$b/\frac{(m-1)(m+2)x}{2x+1} = m+2$$

7. Giải phương trình bậc hai theo tham số m :

$$a/(m-1)x^2 + 3x - 1 = 0;$$

$$b/x^2 - 4x + m - 3 = 0;$$

$$c/mx^2 + (4m+3)x + 4m + 2 = 0$$

8. Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Nhặt $S = x_1 + x_2$; $P = x_1 \cdot x_2$

a/ Hãy tính các biểu thức sau theo S, P : $x_1^2 + x_2^2$; $x_1^3 + x_2^3$; $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$; $x_1 - x_2$

b/ Aùp dưõng : Khoång giõi phõõng trỡnh $x^2 - 2x - 15 = 0$ hõõ tỡnh :

_ Toång bỡnh phõõng hai nghiõm.

_ Bỡnh phõõng toång hai nghiõm

_ Toång lấp phõõng hai nghiõm.

9. Nõnh m nhõ phõõng trỡnh cõ hai nghiõm phõõn biõt thoõa :

$$a/x^2 + (m-1)x + m + 6 = 0 \text{ thoõa : } x_1^2 + x_2^2 = 10.$$

$$b/(m+1)x^2 - 2(m-1)x + m - 2 = 0 \text{ thoõa : } 4(x_1 + x_2) = 7x_1x_2$$

10. Cho phương trình $(m+1)x^2 - (m-1)x + m = 0$

a/ Nõnh m nhõ phõõng trỡnh cõ nghiõm bằõng -3, tỡnh nghiõm cõn lấi

b/ Nõnh m nhõ phõõng trỡnh cõ nghiõm gấp ñõõi nghiõm kia, tỡnh cõc nghiõm.

11. Nõnh m nhõ phõõng trỡnh võ nghiõm :

$$a/mx^2 - (2m+3)x + m + 3 = 0;$$

$$b/mx^2 - 2(m+1)x + m + 1 = 0$$

12. Nõnh m nhõ phõõng trỡnh cõ nghiõm kờp :

$$a/(m+2)x^2 - 2(3m-2)x + m + 2 = 0 ;$$

$$b/x^2 - (2m+3)x + m^2 = 0$$

13. Nõnh m nhõ phõõng trỡnh cõ hai nghiõm phõõn biõt :

$$a/(m-1)x^2 - 2(m+4)x + m - 4 = 0;$$

$$b/(m-2)x^2 - 2(m+3)x + m - 5 = 0$$

14. Nõnh m nhõ phõõng trỡnh cõ nghiõm :

$$a/(m+3)x^2 - (2m+1)x + m - 2 = 0;$$

$$b/x^2 - 2(m+2)x + m^2 + 7 = 0$$

15. Nõnh m nhõ phõõng trỡnh cõ ñũõng mõõt nghiõm :

$$a/mx^2 - 2(m+3)x + m = 0;$$

$$b/(m-1)x^2 - 6(m-1)x + 2m - 3 = 0$$

16. Nõnh m nhõ phõõng trỡnh cõ hai nghiõm õm phõõn biõt : $3x^2 + 5x + 2m + 1 = 0$

17. Giõ cõc hõ phõõng trỡnh.

$$a) \begin{cases} -7x + 3y = -5 \\ 5x - 2y = 4 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 4x - 2y = 6 \\ -2x + y = -3 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} -0,5x + 0,4y = 0,7 \\ 0,3x - 0,2y = 0,4 \end{cases}$$

18. Giõ cõc hõ phõõng trỡnh:

$$\begin{array}{l} \text{a) } \begin{cases} x + 2y - 3z = 2 \\ 2x + 7y + z = 5 \\ -3x + 3y - 2z = -7 \end{cases} \\ \text{b) } \begin{cases} -x - 3y + 4z = 3 \\ 3x + 4y - 2z = 5 \\ 2x + y + 2z = 4 \end{cases} \\ \text{c) } \begin{cases} x + y + z = 7 \\ 3x - 2y + 2z = 5 \\ 4x - y + 3z = 10 \end{cases} \end{array}$$

19. Tìm giá trị của m để các hệ phương trình sau vô nghiệm,

$$\begin{array}{l} \text{a) } \begin{cases} 3x + 2y = 9 \\ mx - 2y = 2 \end{cases} \\ \text{b) } \begin{cases} 2x - my = 5 \\ x + y = 7 \end{cases} \end{array}$$

20. Tìm các giá trị của a và b để các hệ phương trình sau vô nghiệm.

$$\begin{array}{l} \text{a) } \begin{cases} 3x + ay = 5 \\ 2x + y = b \end{cases} \\ \text{b) } \begin{cases} ax + 2y = a \\ 3x - 4y = b + 1 \end{cases} \end{array}$$

21.*Giải các hệ phương trình sau:

$$\begin{array}{l} \text{a) } \begin{cases} x^2 + 4y^2 = 8 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \\ \text{b) } \begin{cases} x^2 - xy = 24 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases} \\ \text{c) } \begin{cases} (x - y)^2 = 49 \\ 3x + 4y = 84 \end{cases} \\ \text{d) } \begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 + 2x + 3y - 6 = 0 \\ 2x - y = 3 \end{cases} \\ \text{e) } \begin{cases} 3x - 4y + 1 = 0 \\ xy = 3(x + y) - 9 \end{cases} \\ \text{f) } \begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ xy + x + y + 6 = 0 \end{cases} \\ \text{g) } \begin{cases} y + x^2 = 4x \\ 2x + y - 5 = 0 \end{cases} \\ \text{h) } \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 3x^2 - y^2 + 2y = 4 \end{cases} \\ \text{i) } \begin{cases} 2x - y = 5 \\ x^2 + xy + y^2 = 7 \end{cases} \end{array}$$

22.*Giải và biện luận các hệ phương trình sau:

$$\begin{array}{l} \text{a) } \begin{cases} x + y = 6 \\ x^2 + y^2 = m \end{cases} \\ \text{b) } \begin{cases} x + y = m \\ x^2 - y^2 + 2x = 2 \end{cases} \\ \text{c) } \begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ x^2 + y^2 = m \end{cases} \end{array}$$

23.*Giải các hệ phương trình sau:

$$\begin{array}{l} \text{a) } \begin{cases} x + xy + y = 11 \\ x^2 + y^2 - xy - 2(x + y) = -31 \end{cases} \\ \text{b) } \begin{cases} x + y = 4 \\ x^2 + xy + y^2 = 13 \end{cases} \\ \text{c) } \begin{cases} xy + x + y = 5 \\ x^2 + y^2 + x + y = 8 \end{cases} \\ \text{d) } \begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{13}{6} \\ x + y = 6 \end{cases} \\ \text{e) } \begin{cases} x^3 + x^3y^3 + y^3 = 17 \\ x + y + xy = 5 \end{cases} \\ \text{f) } \begin{cases} x^4 + x^2y^2 + y^4 = 481 \\ x^2 + xy + y^2 = 37 \end{cases} \end{array}$$

24.*Giải và biện luận các hệ phương trình sau:

$$\begin{array}{l} \text{a) } \begin{cases} x + y + xy = m \\ x^2 + y^2 = 3 - 2m \end{cases} \\ \text{b) } \begin{cases} x + y = m + 1 \\ x^2y + xy^2 = 2m^2 - m - 3 \end{cases} \\ \text{c) } \begin{cases} (x + 1)(y + 1) = m + 5 \\ xy(x + y) = 4m \end{cases} \end{array}$$

25.*Giải các hệ phương trình sau:

$$\begin{array}{l} \text{a) } \begin{cases} x^2 = 3x + 2y \\ y^2 = 3y + 2x \end{cases} \\ \text{b) } \begin{cases} x^2 - 2y^2 = 2x + y \\ y^2 - 2x^2 = 2y + x \end{cases} \\ \text{c) } \begin{cases} x^3 = 2x + y \\ y^3 = 2y + x \end{cases} \\ \text{d) } \begin{cases} x - 3y = 4\frac{y}{x} \\ y - 3x = 4\frac{x}{y} \end{cases} \\ \text{e) } \begin{cases} 3y = \frac{y^2 + 2}{x^2} \\ 3x = \frac{x^2 + 2}{y^2} \end{cases} \\ \text{f) } \begin{cases} 2x^2 = y + \frac{1}{y} \\ 2y^2 = x + \frac{1}{x} \end{cases} \end{array}$$

26.*Giải và biện luận các hệ phương trình sau:

$$\begin{array}{l} \text{a) } \begin{cases} x^2 = 3x + my \\ y^2 = 3y + mx \end{cases} \\ \text{b) } \begin{cases} x(3 - 4y^2) = m(3 - 4m^2) \\ y(3 - 4x^2) = m(3 - 4m^2) \end{cases} \\ \text{c) } \begin{cases} xy + x^2 = m(y - 1) \\ xy + y^2 = m(x - 1) \end{cases} \end{array}$$

27.*Giải các hệ phương trình sau:

a)
$$\begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = -1 \\ 3x^2 - xy + 3y^2 = 13 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 2x^2 - 4xy + y^2 = -1 \\ 3x^2 + 2xy + 2y^2 = 7 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} y^2 - 3xy = 4 \\ x^2 - 4xy + y^2 = 1 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} 3x^2 + 5xy - 4y^2 = 38 \\ 5x^2 - 9xy - 3y^2 = 15 \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} x^2 - 2xy + 3y^2 = 9 \\ x^2 - 4xy + 5y^2 = 5 \end{cases}$$

f)
$$\begin{cases} 3x^2 - 8xy + 4y^2 = 0 \\ 5x^2 - 7xy - 6y^2 = 0 \end{cases}$$

28.*Giải và biện luận các hệ phương trình sau:

a)
$$\begin{cases} x^2 + mxy + y^2 = m \\ x^2 + (m-1)xy + my^2 = m \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} xy - y^2 = 12 \\ x^2 - xy = m + 26 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x^2 - 4xy + y^2 = m \\ y^2 - 3xy = 4 \end{cases}$$

Chương IV. BẤT ĐẲNG THỨC VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ.

1. Bất đẳng thức.

a) Tính chất:

$a > b$ và $b > c \Rightarrow a > c$
$a > b \Leftrightarrow a + c > b + c$
$a > b$ và $c > d \Rightarrow a + c > b + d$
$a + c > b \Leftrightarrow a > b - c$
$a > b \Leftrightarrow \begin{cases} ac > bc & \text{khi } c > 0 \\ ac < bc & \text{khi } c < 0 \end{cases}$
$a > b \geq 0$ và $c > d \geq 0 \Rightarrow ac > bd$
$a > b \geq 0$ và $n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow a^n > b^n$
$a > b \geq 0 \Rightarrow \sqrt{a} > \sqrt{b}$
$a > b \Rightarrow \sqrt[3]{a} > \sqrt[3]{b}$
$ x \geq 0, x \geq x, x \geq -x$
$ x \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a \quad (a > 0)$
$ x \geq a \Leftrightarrow x \leq -a$ hoặc $x \geq a$
$ a - b \leq a + b \leq a + b $

b) Bất đẳng thức Cô-si.

* $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}; \frac{a+b}{2} = \sqrt{ab} \Leftrightarrow a = b (\forall a, b \geq 0)$

* $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}; \frac{a+b+c}{3} = \sqrt[3]{abc} \Leftrightarrow a = b = c (\forall a, b, c \geq 0)$

BÀI TẬP.

1. Với x, y, z tùy ý. Chứng minh rằng:

a). $x^4 + y^4 \geq x^3y + y^3x$ b) $x^2 + 4y^2 + 3z^2 + 14 > 2x + 12y + 6z$.

2. Chứng minh các bất đẳng thức sau :

Với $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$:

$a/ a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a + b + c)$

$b/ a^2 + b^2 + a^2b^2 + 1 \geq 4ab$

$$c/ \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$$

$$d/ a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$$

$$e/ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b+c+d+e)$$

$$f/ a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

$$g/ (a+b+c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$h/ a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$$

3. Vôùi a, b, c > 0 :

$$a/ \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq a + b + c$$

$$b/ \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}$$

$$c/ \frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

$$d/ (a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$$

$$e/ (a+2)(b+2)(a+b) \geq 16ab$$

$$f/ \frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$g/ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$$

$$h/ \frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$$

$$k/ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \geq \frac{16}{a+b+c+d}$$

$$l/ a^2b + \frac{1}{b} \geq 2a$$

$$m/ (a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$$

$$n/ (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \geq 2\sqrt{2(a+b)\sqrt{ab}}$$

$$p/ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$$

4.. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{4}{x} + \frac{9}{1-x}$ với $0 < x < 1$.

5.. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau trên TXĐ của hàm số $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{5-x}$

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ.

2. Bất phương trình.

a) Bất phương trình tương đương.

* Hai bất phương trình gọi là tương đương nếu chúng có cùng tập nghiệm.

Nếu $f_1(x) < g_1(x)$ tương đương với $f_2(x) < g_2(x)$ thì ta viết: $f_1(x) < g_1(x) \Leftrightarrow f_2(x) < g_2(x)$

* Bất phương trình $f(x) < g(x)$ tương đương với bất phương trình

$$- f(x) + h(x) < g(x) + h(x).$$

$$- f(x).h(x) < g(x).h(x) \text{ nếu } h(x) > 0 \quad \forall x \in D$$

$$- f(x).h(x) > g(x).h(x) \text{ nếu } h(x) < 0 \quad \forall x \in D$$

$$f(x) < g(x) \Leftrightarrow [f(x)]^3 < [g(x)]^3$$

$$f(x) < g(x) \Leftrightarrow [f(x)]^2 < [g(x)]^2 \text{ với } f(x) > 0, g(x) > 0$$

b) Bất phương trình bậc nhất và bậc hai.

$$* ax + b < 0 \quad (1)$$

i) Nếu $a > 0$ thì (1) $\Leftrightarrow x < -\frac{b}{a}$

ii) Nếu $a < 0$ thì (1) $\Leftrightarrow x > -\frac{b}{a}$

iii) Nếu $a = 0$ thì (1) $\Leftrightarrow 0x < -b$

. $b \geq 0$ bất phương trình vô nghiệm.

. $b < 0$ bất phương trình nghiệm đúng với mọi x

* Cho nhị thức bậc nhất $f(x) = ax + b$ ($a \neq 0$). Ta có :

x	-∞	x ₀	+∞
f(x) = ax + b	trái dấu với a	0	cùng dấu với a

* Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$). Ta có:

Nếu $\Delta < 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với hệ số a với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Nếu $\Delta = 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với hệ số a với mọi $x \neq -\frac{b}{2a}$

Nếu $\Delta > 0$ thì $f(x)$ có hai nghiệm x_1, x_2 ($x_1 < x_2$). Khi đó, $f(x)$ trái dấu với hệ số a với mọi $x \in (x_1, x_2)$ (tức là $x_1 < x < x_2$) và $f(x)$ cùng dấu với hệ số a với mọi x nằm ngoài đoạn $[x_1, x_2]$ (tức là $x < x_1$ hoặc $x > x_2$)

* Để tìm điều kiện để tam thức bậc hai luôn âm hoặc luôn dương ta áp dụng:

$$\forall x \in \mathbb{R}, ax^2 + bx + c > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, ax^2 + bx + c < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$$

* Để giải bất phương trình bậc hai ta áp dụng định lý về dấu tam thức bậc hai

B. BÀI TẬP

1. Giải bất phương trình :

$$a/ \frac{3x-1}{4} - \frac{3(x-2)}{8} - 1 > \frac{5-3x}{2}$$

$$b/ 3 - \frac{4x-1}{18} \geq \frac{x-1}{12} - \frac{4-5x}{9}$$

$$c/ \frac{3x+1}{2} - \frac{x-2}{3} < \frac{1-2x}{4}$$

$$d/ \frac{x-3}{4} + \frac{1-2x}{5} \leq \frac{x+1}{3}$$

2. Giải hệ bất phương trình :

$$a/ \begin{cases} 8x-5 > \frac{15x-8}{2} \\ 2(2x-3) > 5x - \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$b/ \begin{cases} 6x + \frac{5}{7} > 4x + 7 \\ \frac{8x+3}{2} \leq 2x + 25 \end{cases} \quad c/ \begin{cases} 3x-5 \leq 0 \\ 2x+3 \geq 0 \\ x+1 > 0 \end{cases}$$

$$d/ \begin{cases} \frac{2x-3}{4} < \frac{3x+1}{5} \\ 3x + \frac{5}{2} < 8 - \frac{x}{3} \end{cases}$$

$$e/ \begin{cases} \frac{4x-5}{7} < x + 3 \\ \frac{3x+8}{4} \geq 2x - 5 \end{cases}$$

3. Giải vờ biến luận bất phương trình theo tham số m :

$$a/ m(x-m) \leq x-1$$

$$b/ mx + 6 > 2x + 3m$$

$$c/ (m+1)x + m < 3x + 4$$

4. Xét dấu biểu thức sau :

$$a/ f(x) = 2x - 5; \quad f(x) = -11 - 4x;$$

$$b/ f(x) = (2x+1)(x-5)$$

$$c/ f(x) = (3x-1)(2-x)(5+x);$$

$$d/ f(x) = \frac{(-x)(x+3)^2}{5x+10}$$

$$e/ f(x) = \frac{3}{4-x} + \frac{-2}{3x+1};$$

$$f/ f(x) = \frac{2x^2 - 3x}{1-x}$$

5. Giải bất phương trình :

$$a/ \frac{3x-4}{x-2} > 1;$$

$$b/ \frac{2x-5}{2-x} \geq -1;$$

$$c/ \frac{2}{x-1} \leq \frac{5}{2x-1};$$

$$d/ \frac{-4}{3x+1} < \frac{3}{2x-1}$$

6. Giải phương trình chừa trò tuyệt đối :

$$a/ |x-1| + |2x-4| = 3;$$

$$b/ |7-2x| = |5-3x| + |x+2|$$

7. Xét dấu biểu thức sau :

$$a / f(x) = 2x^2 - 5x - 7;$$

$$b / f(x) = -x^2 + 2x - 1;$$

$$c / f(x) = x^2 + 4x + 5;$$

$$d / f(x) = \frac{(2x+3)(4x-x^2)}{x^2-6x+9};$$

$$e / f(x) = \frac{x^3+x^2-6x}{9-x^2};$$

$$f / f(x) = \frac{3x+7}{x^2-x-2} + 5;$$

$$g / f(x) = \frac{(-2x^2+3x-1)(x^3-1)}{x^2+x-6}$$

8. Giải các bất phương trình sau :

$$a / (1-x^2)(x^2-5x+6) < 0;$$

$$b / \frac{4x+1}{4(2-x)} \leq x+2;$$

$$c / \frac{4-x}{x-5} \geq \frac{1}{1-x};$$

$$d / 3(1-x) > \frac{7-8x}{1+x};$$

$$e / (x^2-16x+21)^2 > 36x^2;$$

$$f / \frac{x^2-2x-3}{x^2-4x+3} \geq \frac{1}{1-x};$$

$$g / \frac{x^2-4x+3}{3-2x} < 1-x;$$

$$h / \frac{x^3+x-x^2-1}{x+8} \leq 0;$$

$$i / (2x-7)(3x^2-5x+2) \geq 0$$

9. Giải các hệ sau :

$$a / \begin{cases} 2x^2 - 12x + 18 > 0; \\ 3x^2 - 20x - 7 < 0; \end{cases}$$

$$b / \begin{cases} x^3 - 11x^2 + 10x \geq 0; \\ x^3 - 12x^2 + 32x \leq 0; \end{cases}$$

$$c / \begin{cases} 6+x-x^2 \geq 0; \\ x^2-4x < 0; \end{cases}$$

$$d / \begin{cases} (2x-1)(x^2-9) \geq 0; \\ x^2-x \leq 20 \end{cases}$$

$$e / \begin{cases} 6x^2 + 5x - 56 < 0 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{8-x} > \frac{1}{x+1} \end{cases}$$

$$f / \begin{cases} (x^2-8x)^2 < (x+10)^2 \\ x^2+4x+3 < 0 \end{cases}$$

10. Tìm m để $\forall x \in \mathbb{R}$, ta có :

$$a / x^2 - (3m-2)x + 2m^2 - 5m - 2 > 0$$

$$b / (m+1)x^2 - 8x + m + 1 \geq 0$$

$$c / (m-2)x^2 + 2(2m-3)x + 5m - 6 \leq 0$$

$$d / m(m+2)x^2 + 2mx + 3 < 0$$

11. Tìm m để bất phương trình sau vô nghiệm :

$$a / 3x^2 + 2(2m-1)x + m + 4 \leq 0$$

$$b / (3-m)x^2 - 2(m+3)x + m + 2 > 0$$

12. Giải bất phương trình :

$$a / |x^2-1| - 2x < 0;$$

$$b / |2x+5| \geq |7-4x|;$$

$$c / |5-4x| > 2x-1;$$

$$d / 4-x + |3x^2-6x| < 2x-6;$$

$$e / \left| \frac{x^2-4x}{x^2+3x+2} \right| \geq 1$$

13. Giải bất phương trình :

$$a / \sqrt{x+18} < 2-x;$$

$$b / x \geq \sqrt{24-5x};$$

$$c / 1 - \sqrt{13-3x^2} > 2x;$$

$$d / \sqrt{5-x^2} > x-2;$$

$$e / \sqrt{x^2-3x+2} \geq \sqrt{2x-4}$$

$$f / \sqrt{-2-3x-x^2} < \sqrt{x+1}$$

14. Giải bất phương trình:

$$a / (x^2+x+1)(x^2+x+3) \geq 15$$

$$b / (x+4)(x+1) - 3\sqrt{x^2+5x+2} < 6$$

$$c / x^2 - 4x - 6 \geq \sqrt{2x^2 - 8x + 12}$$

$$d / (x-3)\sqrt{x^2+4} \leq x^2-9$$

Chương V. THỐNG KÊ.

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ.

1. Một số kiến thức cơ bản.

* Một tập con hữu hạn các đơn vị điều tra được gọi là một mẫu. Số phần tử của một mẫu được gọi là kích thước mẫu. Dãy các giá trị của dấu hiệu thu được trên mẫu được gọi là một mẫu số liệu.

* Số lần xuất hiện của mỗi giá trị trong mẫu số liệu được gọi là tần số của giá trị đó.

* Tần suất f_i của giá trị x_i là tỉ số giữa tần số n_i và kích thước mẫu N .

$$f_i = \frac{n_i}{n}$$

* Người ta có thể liệt kê tần số và tần suất của đơn vị điều tra thành bảng, ta được bảng phân bố tần số, tần suất. Nếu bảng đó có chia lớp, ta được bảng phân bố tần số tần suất ghép lớp.

2. Các số đặc trưng.

* Số trung bình: $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N}$ hay $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$.

Đối với bảng phân bố tần số ta có: $\bar{x} = \frac{n_1 x_1 + \dots + n_m x_m}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^m n_i x_i$

Số trung bình dùng làm đại diện cho mẫu số liệu.

* Số trung vị: Giả sử ta có một mẫu gồm N số liệu được sắp xếp theo thứ tự không giảm. Nếu N là một số lẻ thì số liệu đứng thứ $\frac{N+1}{2}$ (số liệu đứng chính giữa) gọi là số trung vị. Nếu N là số chẵn, ta lấy số trung

bình cộng của hai số liệu đứng thứ $\frac{N}{2}$ và $\frac{N}{2} + 1$ làm số trung vị. Số trung vị được kí hiệu là m .

* Mốt: Cho một mẫu số liệu dưới dạng bảng phân bố tần số. Giá trị có tần số lớn nhất được gọi là mốt của mẫu số liệu và kí hiệu là m_0 .

* Phương sai: Để đo mức độ biến động, chênh lệch giữa các giá trị của dấu hiệu, người ta đưa ra một chỉ tiêu gọi là phương sai.

Giả sử có một mẫu số liệu kích thước N là $\{ x_1, x_2, \dots, x_N \}$. Phương sai của mẫu số liệu này, kí hiệu là s^2 , được tính bởi công thức sau:

$$s^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \text{ trong đó } \bar{x} \text{ là số trung bình của mẫu số liệu.}$$

Hay

$$s^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 - \frac{1}{N^2} \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2$$

* Độ lệch chuẩn: Căn bậc hai của phương sai được gọi là độ lệch chuẩn, kí hiệu là s . Ta có:

$$s = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$$

$$s^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^m n_i x_i^2 - \frac{1}{N^2} \left(\sum_{i=1}^m n_i x_i \right)^2$$

B. BÀI TẬP

1. Cho các số liệu ghi trong bảng sau

Thời gian hoàn thành một sản phẩm ở một nhóm công nhân (đơn vị:phút)

42	42	42	42	44	44	44	44	44	45
45	45	45	45	45	45	45	45	45	45
45	45	45	45	45	45	45	45	45	54
54	54	50	50	50	50	48	48	48	48
48	48	48	48	48	48	50	50	50	50

a/Hãy lập bảng phân bố tần số ,bảng phân bố tần suất.

b/Trong 50 công nhân được khảo sát ,những công nhân có thời gian hoàn thành một sản phẩm từ 45 phút đến 50 phút chiếm bao nhiêu phần trăm?

2. Chiều cao của 30 học sinh lớp 10 được liệt kê ở bảng sau (đơn vị cm):

145	158	161	152	152	167
150	160	165	155	155	164
147	170	173	159	162	156
148	148	158	155	149	152
152	150	160	150	163	171

a) Hãy lập bảng phân bố tần suất ghép lớp với các lớp là: [145; 155); [155; 165); [165; 175].

b) Vẽ biểu đồ tần số, tần suất hình cột, đường gấp khúc tần suất

c) Phương sai và độ lệch chuẩn

3. Điểm thi học kì II môn Toán của một tổ học sinh lớp 10A (quy ước rằng điểm kiểm tra học kì có thể làm tròn đến 0,5 điểm) được liệt kê như sau:

2 ; 5 ; 7,5 ; 8 ; 5 ; 7 ; 6,5 ; 9 ; 4,5 ; 10.

a) Tính điểm trung bình của 10 học sinh đó (chỉ lấy đến một chữ số thập phân sau khi đã làm tròn).

b) Tính số trung vị của dãy số liệu trên.

4. Cho các số liệu thống kê ghi trong bảng sau :

Thành tích chạy 500m của học sinh lớp 10A ở trường THPT C. (đơn vị : giây)

6.3	6.2	6.5	6.8	6.9	8.2	8.6	6.6	6.7	7.0	7.1
8.5	7.4	7.3	7.2	7.1	7.0	8.4	8.1	7.1	7.3	7.5
8.7	7.6	7.7	7.8	7.5	7.7	7.8	7.2	7.5	8.3	7.6

a). Lập bảng phân bố tần số, tần suất ghép lớp với các lớp :

[6,0 ; 6,5) ; [6,5 ; 7,0) ; [7,0 ; 7,5) ; [7,5 ; 8,0) ; [8,0 ; 8,5) ; [8,5 ; 9,0]

b). Vẽ biểu đồ tần số hình cột, đường gấp khúc về thành tích chạy của học sinh.

c). Tính số trung bình cộng, phương sai, độ lệch chuẩn của bảng phân bố.

5. Số lượng khách đến tham quan một điểm du lịch trong 12 tháng được thống kê như ở bảng sau:

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Số khách	430	550	430	520	550	515	550	110	520	430	550	880

a). Lập bảng phân bố tần số, tần suất và tìm số trung bình

b). Tìm một, số trung vị, phương sai, độ lệch chuẩn.

6. Điều tra về chiều cao của 36 học sinh trung học phổ thông (Tính bằng cm) được chọn ngẫu nhiên người điều tra viên thu được bảng phân bố tần số ghép lớp sau

Lớp chiều cao	Tần số
[160; 162]	8
[163; 165]	14
[166; 168]	8
[169; 171]	6
cộng	$N = 36$

a. Bổ sung vào bảng phân bố trên để được bảng phân bố tần số, tần suất ghép lớp

b. Tính giá trị trung bình và phương sai của mẫu số liệu trên (lấy gần đúng một chữ số thập phân)

7. Tiến hành một cuộc thăm dò về số giờ tự học của học sinh lớp 10 ở nhà. Người điều tra chọn ngẫu nhiên 50 học sinh lớp 10 và đề nghị các em cho biết số giờ tự học ở nhà trong 10 ngày. Mẫu số liệu được trình bày dưới dạng bảng phân bố tần số ghép lớp sau đây

Lớp	Tần số
[0; 10)	5
[10; 20)	9
[20; 30)	15
[30; 40)	10
[40; 50)	9
[50; 60]	2
Cộng	$N = 50$

a) Lập bảng phân bố tần số, tần suất ghép lớp.

b) Tính phương sai của mẫu số liệu trên (lấy gần đúng 3 chữ số thập phân).

c) Vẽ hai biểu đồ hình cột biểu diễn phân bố tần số, tần suất.

8. Cho bảng phân bố tần số khối lượng 30 quả trứng gà của một rổ trứng gà :

Khối lượng (g)	Tần số
25	3
30	5
35	7
40	9
45	4
50	2
Cộng	30

a) Lập bảng phân bố tần suất.

b) Vẽ biểu đồ tần số hình cột, đường gấp khúc tần số và biểu đồ tần suất hình quạt.

c) Tìm số trung bình cộng, số trung vị, mốt của mẫu số liệu

d) Tính phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu.

9. Chọn 23 học sinh và ghi cỡ giấy của các em ta được mẫu số liệu sau:

39 41 40 43 41 40 44 42 41 43 38 39
 41 42 39 40 42 43 41 41 42 39 41

- a. Lập bảng phân bố tần số và tần suất.
- b. Tính số trung vị và số một của mẫu số liệu (*lấy gần đúng một chữ số thập phân*)

10. Trong một cuộc thi bắn có 2 xạ thủ, mỗi người bắn 30 viên đạn. Kết quả cho trong 2 bảng sau:

Điểm số của xạ thủ A

10	10	10	8	10	9	5	8	8	10	5	10	10	9
10	6	8	9	10	9	9	9	9	9	7	8	6	8

Điểm số của xạ thủ B

9	9	9	8	8	5	9	10	10	9	6	7	8	10
9	10	10	10	7	7	8	8	8	8	7	10	9	9

- a. Tính số trung bình, phương sai và độ lệch chuẩn của các số liệu thống kê cho trong hai bảng trên.
- b. Xét xem xạ thủ nào bắn giỏi hơn?

Chương VI. CUNG VÀ GÓC LƯỢNG GIÁC. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC**A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ.****1. Góc và cung lượng giác.**

* Cung tròn có số đo bằng $\frac{1}{360}$ số đo của đường tròn gọi là 1 độ và kí hiệu : 1^0 . Cung tròn có độ dài bằng

bán kính gọi là cung có số đo 1 radian, gọi tắt là cung 1 radian.

* Góc lượng giác là góc được gắn với đường tròn lượng giác có nghĩa là có chiều dương, chiều âm và độ lớn tùy ý. Hai góc lượng giác có chung tia đầu và tia cuối có dạng α và $\alpha + k2\pi$.

* Cho đường tròn lượng giác gốc A, góc α có tia cuối là OM. Khi đó tung độ của M gọi là $\sin \alpha$, hoành độ của M gọi là $\cos \alpha$, tỉ số $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ gọi là tang α , kí hiệu : $\tan \alpha$, tỉ số $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ gọi là côtang α , kí hiệu : $\cot \alpha$

Ta có : $-1 \leq \sin \alpha, \cos \alpha \leq 1$; $\cos(\alpha + k2\pi) = \cos \alpha$; $\sin(\alpha + k2\pi) = \sin \alpha$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 ; \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1 ; 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} ; 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

2. Giá trị lượng giác của những góc có liên quan đặc biệt.

* Hai góc đối nhau thì có cosin bằng nhau còn các giá trị khác đối nhau.

* Hai góc bù nhau thì có sin bằng nhau còn các giá trị khác đối nhau.

* Hai góc hơn kém nhau π thì có sin và cosin đối nhau còn các giá trị khác bằng nhau.

* Hai góc phụ nhau thì có cosin góc này bằng sin góc kia, tan góc này bằng cot góc kia.

3. Công thức lượng giác.

* **Công thức cộng.**

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

* **Công thức nhân đôi.**

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

* **Công thức hạ bậc.**

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} ; \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

* **Công thức biến đổi tổng thành tích.**

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]$$

* **Công thức biến đổi tổng thành tích.**

$$\cos x + \cos y = 2\cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} ; \cos x - \cos y = -2\sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} ; \sin x - \sin y = 2\cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

B. BÀI TẬP.

1. a) Cho $\sin \alpha = \frac{3}{5}$; và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Cho Tính $\cos \alpha$, $\tan \alpha$, $\cot \alpha$.
 b) Cho $\tan \alpha = 2$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ Tính $\sin \alpha$, $\cos \alpha$.
2. a) Cho $\cos \alpha = -\frac{12}{13}$; và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\tan 2\alpha$, $\cot 2\alpha$
 b) Cho $\cot \alpha = 2$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$. Tính $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\tan 2\alpha$, $\cot 2\alpha$.
 c) Cho $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{5}$. Tính $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$.
3. a) Cho $\sin \alpha = -\frac{5}{9}$; và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $\sin \frac{\alpha}{2}$, $\cos \frac{\alpha}{2}$, $\tan \frac{\alpha}{2}$, $\cot \frac{\alpha}{2}$.
 b) Cho $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ và $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Tính $\sin \frac{\alpha}{2}$, $\cos \frac{\alpha}{2}$, $\tan \frac{\alpha}{2}$, $\cot \frac{\alpha}{2}$.

4. Không sử dụng máy tính hãy tính

a) $\sin 75^\circ$	b) $\tan 105^\circ$	c) $\cos(-15^\circ)$
d) $\sin \frac{\pi}{12}$	e) $\cos \frac{22\pi}{3}$	f) $\sin \frac{23\pi}{4}$

5: Rút gọn các biểu thức:

a) $A = \frac{\cos 2a - \cos 4a}{\sin 4a + \sin 2a}$	b) $B = \frac{2 \sin 2a - \sin 4a}{2 \sin 2a + \sin 4a}$
c) $C = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - a\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} - a\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - a\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} - a\right)}$	d) $D = \frac{\sin a - \sin 3a}{2 \cos 4a}$

6. Chứng minh rằng:

a) $(1 + \tan \alpha) \sin^3 \alpha + (1 + \tan \alpha) \cos^3 \alpha = \sin \alpha + \cos \alpha$	
b) $\frac{\sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha - 1}{\cot^2 \alpha} = \sin^2 \alpha$	c) $\frac{\sin^2 \alpha - \tan^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - \cot^2 \alpha} = \tan^6 \alpha$
d) $(\cot \alpha + \tan \alpha)^2 - (\cot \alpha - \tan \alpha)^2 = 4$	e) $\cos 4\alpha - \sin 4\alpha = 1 - 2 \sin 2\alpha$
f) $\frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{\tan \alpha - 1}{\tan \alpha + 1}$	g) $\frac{\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = 1 - \sin \alpha \cos \alpha$
h) $\frac{4 \sin^2 \alpha}{1 - \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = 16 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$	k) $\frac{1 + \cos \alpha - \sin \alpha}{1 - \cos \alpha - \sin \alpha} = -\cot \frac{\alpha}{2}$
l) $\frac{\sin 2\alpha + \sin \alpha}{1 + \cos 2\alpha + \cos \alpha} = \tan \alpha$	

7. Chứng minh rằng trong tam giác ABC ta có:

a) $\sin(A + B) = \sin C$	b) $\sin\left(\frac{A + B}{2}\right) = \cos \frac{C}{2}$
---------------------------	--

8. Tính giá trị của các biểu thức sau:

$$a) P = \frac{\sqrt{3} \tan 30^\circ - \cos 60^\circ \cot 30^\circ - 2\sqrt{2} \sin 45^\circ}{\sqrt{6} \sin 90^\circ \cdot \cos 45^\circ \sin 60^\circ}$$

$$b) Q = \frac{2 \tan \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} + 3 \cot \frac{\pi}{4}}{2 \sin \frac{3\pi}{4} + 6 \cos \frac{2\pi}{3} - 5 \tan \frac{5\pi}{6}}$$

$$c) R = \sqrt{3} \cot \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{6}}{3} \sin \frac{2\pi}{3} \cos \frac{\pi}{6}$$

9. Chứng minh rằng:

$$a) \cos \alpha \cos \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right) \cos \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right) = \frac{1}{4} \cos 3\alpha$$

$$b) \sin 5\alpha - 2 \sin \alpha (\cos 4\alpha + \cos 2\alpha) = \sin \alpha$$

$$c) \frac{\sin 20^\circ \sin 30^\circ \sin 40^\circ \sin 50^\circ \sin 60^\circ \sin 70^\circ}{\cos 10^\circ \cos 50^\circ} = \frac{\sqrt{13}}{6}$$

$$d) \frac{\sin \alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{\cos \alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha} = \tan 3\alpha$$

$$e) \frac{3 - 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{3 + 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha} = \tan^4 \alpha$$

10. Chứng minh các đồng nhất thức

$$a) \frac{1 - \cos x + \cos 2x}{\sin 2x - \sin x} = \cot x$$

$$b) \frac{\sin x + \sin \frac{x}{2}}{1 + \cos x + \cos \frac{x}{2}} = \tan \frac{x}{2}$$

$$c) \frac{2 \cos 2x - \sin 4x}{2 \cos 2x + \sin 4x} = \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} - x \right)$$

$$d) \tan x - \tan y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cdot \cos y}$$

11. Chứng minh đẳng thức lượng giác sau:

$$a) \sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cdot \cos x)$$

$$b) \sin^3 x - \cos^3 x = (\sin x - \cos x)(1 + \sin x \cdot \cos x)$$

$$c) \cos^4 x + \sin^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x$$

$$d) (1 - \sin x)(1 + \sin x) = \sin^2 x \cdot \cot^2 x$$

$$e) \frac{\sin x \cdot \cot x}{\cos x} = 1$$

$$f) \sin^2 x + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - \cos^2 x$$