

**TÀI LIỆU MÔN TOÁN LỚP 11 HÌNH HỌC**

**I - PHÉP TỊNH TIẾN**

1) tóm tắt lí thuyết

a)  $T_{\vec{v}}(A) = A' \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} = \vec{v}$

b)  $\begin{cases} T_{\vec{v}}(M) = M' \\ T_{\vec{v}}(N) = N' \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}$

c) Biểu thức tọa độ: Với  $\vec{v} = (x_0; y_0), M = (x; y), T_{\vec{v}}(M) = M'(x'; y')$  thì  $\begin{cases} x' = x + x_0 \\ y' = y + y_0 \end{cases}$

2) Dạng bài tập

**a) dạng 1:** Cho điểm  $A(x; y)$  tìm ảnh  $A'(x'; y')$  là ảnh của  $A$  qua phép  $T_{\vec{v}}$  với  $\vec{v} = (x_0; y_0)$

CÁCH GIẢI:

ta có:  $\begin{cases} x' = x + x_0 \\ y' = y + y_0 \end{cases}$

Vậy  $A'(x + x_0; y + y_0)$ .

**b) Dạng 2:** Cho đường thẳng  $d: ax + by + c = 0$  tìm ảnh của  $d$  qua phép  $T_{\vec{v}}$  với  $\vec{v} = (x_0; y_0)$

CÁCH GIẢI:

Gọi  $d'$  là ảnh của  $d$  qua phép  $T_{\vec{v}}$  với  $\vec{v} = (x_0; y_0)$

Cách 1:

Với  $M = (x; y) \in d$  ta có  $T_{\vec{v}}(M) = M'(x'; y') \in d'$ . Áp dụng biểu thức tọa độ của phép  $T_{\vec{v}}$ :

$$\begin{cases} x' = x + x_0 \\ y' = y + y_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' - x_0 \\ y = y' - y_0 \end{cases}$$

Khi đó ta có

$$d': a(x' - x_0) + b(y' - y_0) + c = 0 \Leftrightarrow ax' + by' - ax_0 - by_0 + c = 0$$

Vậy pt của  $d'$  là:  $ax + by - ax_0 - by_0 + c = 0$

Cách 2:

Ta có  $d$  và  $d'$  song song hoặc trùng nhau, vậy  $d'$  có một vec tơ pháp tuyến là  $\vec{n} = (a; b)$ . Ta tìm 1 điểm thuộc  $d'$ .

Ta có  $M\left(0; -\frac{c}{b}\right) \in d$ , ảnh  $M'(x'; y') \in d'$ , ta có

$$\begin{cases} x' = 0 + x_0 = x_0 \\ y' = -\frac{c}{b} + y_0 \end{cases}$$

Phương trình của  $d'$  là

$$a(x - x_0) + b\left(y + \frac{c}{b} - y_0\right) = 0 \Leftrightarrow ax + by - ax_0 - by_0 + c = 0$$

**II - PHÉP ĐỐI XỨNG TRỤC (Xét trục Ox, trục Oy tương tự)**

**1) tóm tắt lí thuyết**

a)  $D_d(M) = M' \Leftrightarrow d$  là trục trung trực của  $MM'$

b) 
$$\begin{cases} \mathbb{R}_d(M) = M' \\ \mathbb{R}_d(N) = N' \end{cases} \Rightarrow M'N' = MN$$

**c) Biểu thức tọa độ của phép trục Ox**

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

**d) Biểu thức tọa độ của phép trục Oy**

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$$

**2) Bài tập**

**a) dạng 1:** Cho điểm  $A(x; y)$  tìm ảnh  $A'(x'; y')$  là ảnh của  $A$  qua phép  $\mathbb{R}_{Ox}$

CÁCH GIẢI:

Ta có: 
$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$
 vậy  $A'(x; -y)$

**b) Dạng 2:** Cho đường thẳng  $d: ax + by + c = 0$  tìm ảnh của  $d$  qua phép  $\mathbb{R}_{Ox}$

CÁCH GIẢI:

+) Gọi  $d'$  là ảnh của  $d$ , ta cần tìm pt của  $d'$ .

Cách 1:

Với  $M = (x; y) \in d$  ta có  $\mathbb{R}_{Ox}(M) = M'(x'; y') \in d'$ , Áp dụng biểu thức tọa độ của phép  $\mathbb{R}_{Ox}$

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

Khi đó ta có  $ax' - by' + c = 0$

Vậy pt của  $d'$  là  $ax - by + c = 0$

Cách 2:

Ta có 2 điểm  $M\left(0; -\frac{c}{b}\right), N\left(-\frac{c}{a}; 0\right) \in d$ , Gọi ảnh của chúng lần lượt là

$$M'\left(0; \frac{c}{b}\right), N'\left(-\frac{c}{a}; 0\right) \in d'$$

Phương trình của  $d'$  là

$$\frac{x-0}{-\frac{c}{a}-0} = \frac{y-\frac{c}{b}}{0-\frac{c}{b}} \Leftrightarrow -\frac{c}{b}x + \frac{c}{a}y - \frac{c^2}{ab} = 0 \Leftrightarrow ax - by + c = 0$$

**III - PHÉP ĐỐI XỨNG TÂM**

**1) tóm tắt lí thuyết**

a)  $\mathbb{R}_I(M) = M \Leftrightarrow \overline{IM} = -\overline{IM}'$

$$b) \begin{cases} \mathbb{R}_I(M) = M \\ \mathbb{R}_I(N) = N' \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{M'N'} = -\overrightarrow{MN} \Rightarrow M'N' = MN$$

c) Biểu thức tọa độ của phép đx tâm  $O(0;0)$   $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$ ,

**2) Bài tập**

**a) dạng 1:** Cho điểm  $A(x; y)$  tìm ảnh  $A'(x'; y')$  là ảnh của  $A$  qua phép  $\mathbb{R}_O$

CÁCH GIẢI:

Ta có:  $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$

**b) Dạng 2:** Cho đường thẳng  $d: ax + by + c = 0$  tìm ảnh của  $d$  qua phép  $\mathbb{R}_O$

CÁCH GIẢI:

+) Gọi  $d'$  là ảnh của  $d$ , ta cần tìm pt của  $d'$ .

Cách 1:

Với  $M = (x; y) \in d$  ta có  $\mathbb{R}_O(M) = M'(x'; y') \in d'$ , Áp dụng biểu thức tọa độ của phép  $\mathbb{R}_O$

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$

Khi đó ta có  $-ax' - by' + c = 0$

Vậy pt của  $d'$  là  $ax + by - c = 0$

Cách 2:

Ta có  $d$  và  $d'$  song song hoặc trùng nhau, vậy  $d'$  có một vec tơ pháp tuyến là  $\vec{n} = (a; b)$ . Ta tìm 1 điểm thuộc  $d'$ .

Ta có  $M\left(0; -\frac{c}{b}\right) \in d$ , ảnh  $M'(x'; y') \in d'$ , ta có

$$\begin{cases} x' = 0 \\ y' = \frac{c}{b} \end{cases}$$

Vậy  $d'$  có phương trình là:  $a(x-0) + b\left(y - \frac{c}{b}\right) = 0 \Leftrightarrow ax + by - c = 0$

**IV - PHÉP QUAY**

**1) lí thuyết:**

a)  $Q_{(O;\alpha)}(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} OM = OM' \\ (\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{OM}) = \alpha \end{cases}$

b)  $\begin{cases} Q_{(O;\alpha)}(M) = M' \\ Q_{(O;\alpha)}(N) = N' \end{cases} \Rightarrow M'N' = MN$

**2) Bài tập:**

**a) Dạng 1 :** Cho điểm  $A'(a';b')$  CM nó là ảnh của điểm  $A(a;b)$  qua phép quay tâm O góc quay  $\alpha$ , với  $\alpha = \pm 90^\circ, \pm 60^\circ$ .

**CÁCH GIẢI:**

+) Nếu  $\alpha = \pm 90^\circ$  ta có:

$$Q_{(O;\pm 90^\circ)}(A) = A' \Leftrightarrow \begin{cases} OA' = OA \\ (OA';OA) = \pm 90^\circ \end{cases}$$

Để CM  $OA' = OA$  ta CM  $|\overrightarrow{OA'}| = |\overrightarrow{OA}| \Leftrightarrow \sqrt{a'^2 + b'^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$

Để CM  $(OA';OA) = \pm 90^\circ$  đầu tiên ta CM  $OA' \perp OA \Leftrightarrow \overrightarrow{OA'} \cdot \overrightarrow{OA} = 0 \Leftrightarrow a'a + b'b = 0$

NX trên hệ trục tọa độ chiều quay từ A đến A' là dương hay âm, từ đó suy ra  $(OA';OA) = 90^\circ$  hoặc  $(OA';OA) = -90^\circ$  tùy theo đề bài.

+) Nếu  $\alpha = \pm 60^\circ$  cách giải tương tự, để CM  $(OA';OA) = \pm 60^\circ$  ta có thể CM tam giác OAA' đều, rồi NX trên hệ trục tọa độ.

**b) Dạng 2 :** Cho đường thẳng  $d : ax + by + c = 0$  tìm ảnh của d qua phép  $Q_{(O;\alpha)}$  với  $\alpha = \pm 90^\circ, \pm 60^\circ$

**CÁCH GIẢI:**

Ta tìm tọa độ của 2 điểm A', B' lần lượt là ảnh của 2 điểm A, B thuộc đường thẳng d qua  $Q_{(O;\alpha)}$ . Nên chọn A, B lần lượt là giao của d với các trục tọa độ. Khi đó ảnh của d là đường thẳng A'B'.

**BÀI TẬP VẬN DỤNG**

**Bài 1.** trên mp tọa độ Oxy cho 2 điểm  $A(1;2), B(2;0)$ . Đường thẳng d đi qua A và vuông góc với AB.

- a) Tìm ảnh của A, B, d qua phép tịnh tiến theo vec tơ  $\vec{v} = (1;1)$
- b) Tìm phương trình của đường thẳng  $d_1$  sao cho phép tịnh tiến theo vec tơ  $\vec{v} = (1;1)$  biến  $d_1$  thành d.

**Bài 2.** Trên mp tọa độ Oxy cho điểm  $A(1;-1)$ , đường thẳng d đi qua A và vuông góc với đường thẳng  $d_1 : 2x + y + 1 = 0$ .

- a) tìm ảnh của A và d qua phép đx trục Ox.
- b)\* Tìm ảnh của A qua phép đối xứng trục  $d_1$

**Bài 3.** Trên mp tọa độ Oxy cho điểm  $A(0;2)$ , đường thẳng  $d : x + y + 1 = 0$ .

- a) Tìm ảnh của A và d qua phép đối xứng tâm O.
- b)\* Tìm ảnh của d qua phép đối xứng tâm A.

**Bài 4.** Trên mặt phẳng tọa độ cho tam giác đều ABC cạnh bằng 4 (Như hình vẽ)

- a) Tìm ảnh d' của đường thẳng AC qua phép quay tâm O góc quay  $90^\circ$ .
- b) Xác định góc giữa AB và d'

