

## ĐỀ CHÍNH THỨC

### Bài 1 (2,5 điểm):

a) Cho a, b, c là ba số khác 0 thỏa:  $a + b + c = 0$ . Thực hiện:

- Chứng minh rằng:  $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

- Tính giá trị của biểu thức:  $A = \frac{a^2}{a^2 - b^2 - c^2} + \frac{b^2}{b^2 - a^2 - c^2} + \frac{c^2}{c^2 - a^2 - b^2}$

b) Giải phương trình:  $(5x + 3)^3 - (2x + 4)^3 = (3x - 1)^3$

### Bài 2 (1,5 điểm):

a) Cho a, b là hai số dương. Chứng minh rằng:  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$

b) Cho a, b là hai số dương có  $a + b = 1$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = \frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{ab}$$

### Bài 3 (2,0 điểm):

Tam giác ABC có độ dài ba cạnh là  $AB = c$ ,  $AC = b$  và  $BC = a$ . Các phân giác AD, BE và CF cắt nhau tại O.

a) Tính độ dài đoạn thẳng AE theo a, b, c.

b) Chứng minh rằng  $\triangle ABC$  là tam giác vuông khi  $\frac{OB \cdot OC}{BE \cdot CF} = \frac{1}{2}$ .

### Bài 4 (2,5 điểm):

Tam giác ABC có  $BA > BC$ . BE là phân giác và BD là trung tuyến của tam giác. Đường thẳng qua C vuông góc với BE cắt BE, BD, BA lần lượt tại F, G và K. DF cắt BC tại M. Chứng minh rằng:

a) M là trung điểm của đoạn thẳng BC.

b)  $\frac{DA}{DE} = 1 + \frac{BK}{DF}$ .

c) Đường thẳng GE song song với đường thẳng BC.

### Bài 5 (1,5 điểm):

Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng  $p^2 - 1$  chia hết cho 24.

---

## HƯỚNG DẪN CHẤM

### Bài 1 (2,5 điểm):

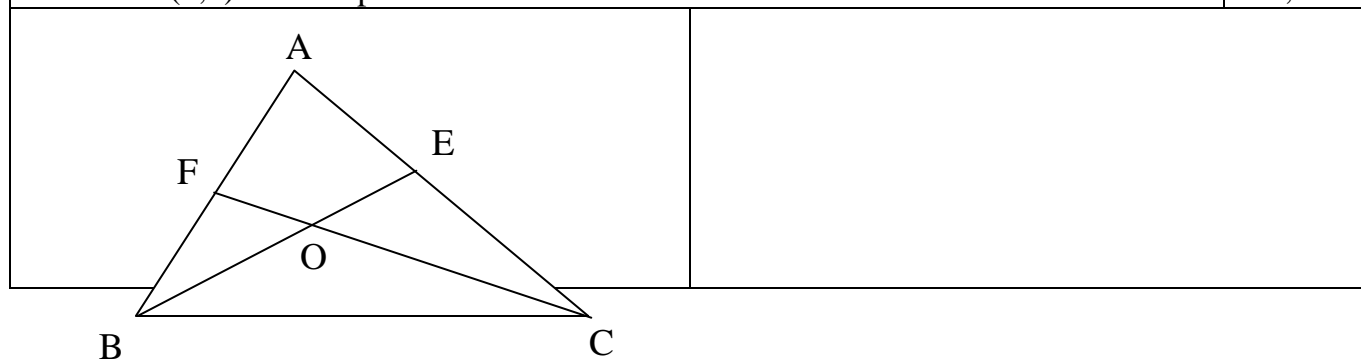
Từ $a + b + c = 0 \Rightarrow a + b = -c \Rightarrow (a + b)^3 = -c^3 \Rightarrow a^3 + b^3 + 3ab(a+b) = -c^3$	0,50
Thay $a + b = -c$ được: $a^3 + b^3 - 3abc = -c^3 \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$	0,25
Từ $a + b + c = 0 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \Rightarrow a^2 - b^2 - c^2 = 2bc$ Tương tự có: $b^2 - a^2 - c^2 = 2ac$ ; $c^2 - a^2 - b^2 = 2ab$	0,50
Thay được: $A = \frac{a^2}{2bc} + \frac{b^2}{2ac} + \frac{c^2}{2ab} = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{2abc}$	0,25
Áp dụng a) được $A = \frac{3abc}{2abc} = \frac{3}{2}$	0,25
$(3x-1)^3 + (2x+4)^3 - (5x+3)^3 = 0 \Leftrightarrow (3x-1)^3 + (2x+4)^3 + (-5x-3)^3 = 0$	0,25
Do $3x - 1 + 2x + 4 - 5x - 3 = 0$ nên $(3x-1)^3 + (2x+4)^3 + (-5x-3)^3 = 3(3x-1)(2x+4)(-5x-3)$	0,25
Giải phương trình $3(3x-1)(2x+4)(-5x-3) = 0$ được nghiệm: $x = \frac{1}{3}; x = -2; x = -\frac{3}{5}$	0,25

**Bài 2 (1,5 điểm):**

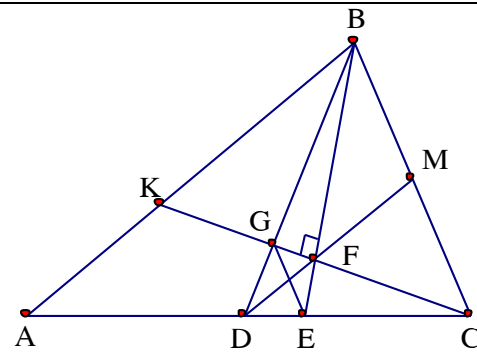
$\Leftrightarrow \frac{a+b}{ab} \geq \frac{4}{a+b} \Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 4ab$ (*) Do $ab(a+b) > 0$	0,25
$\Leftrightarrow (a+b)^2 - 4ab \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$	0,25
Có: $A = \frac{1}{a^2+b^2} + \frac{1}{2ab} + \frac{1}{2ab}$	0,25
$\frac{1}{a^2+b^2} + \frac{1}{2ab} \geq \frac{4}{(a+b)^2} = 4$ . Dấu "=" xảy ra khi $a = b$ .	0,25
Từ (*) có: $\frac{1}{4ab} \geq \frac{1}{(a+b)^2} = 1$ nên $\frac{1}{2ab} \geq 2$ . Dấu "=" xảy ra khi $a = b$	0,25
Vậy A đạt giá trị nhỏ nhất là $4+2 = 6$ khi $a = b = 0.5$	0,25

**Bài 5 (1,5 điểm):**

$p^2 - 1 = (p - 1)(p+1)$ . $p$ là số nguyên tố lớn hơn 3 nên $p$ không chia hết cho 3.	0,25
Nếu $p$ chia 3 dư 1 thì $p - 1$ chia hết cho 3 $\Rightarrow p^2 - 1$ chia hết cho 3. Nếu $p$ chia 3 dư 2 thì $p+1$ chia hết cho 3 $\Rightarrow p^2 - 1$ chia hết cho 3.	0,25
$p$ là số nguyên tố lớn hơn 3 nên $p$ là số lẻ.	0,25
Với $p = 4k + 1$ : $p^2 - 1 = 4k(4k+2) = 8k(k+1)$ : Chia hết cho 8.	0,25
Với $p = 4k + 3$ : $p^2 - 1 = (4k+2)(4k+4) = 4(k+1)(k+2)$ . Do $(k + 1)(k+2)$ là tích của hai số tự nhiên liên tiếp nên $(k + 1)(k+2)$ chia hết cho 2 $\Rightarrow 4(k+1)(k+2)$ chia hết cho 8.	0,25
Do $\text{UCLN}(8,3) = 1$ nên $p^2 - 1$ chia hết cho 24.	0,25



(Hình vẽ bài 3)	(Hình vẽ bài 4)
-----------------	-----------------



**Bài 3 (2,0 điểm):**

BE là phân giác nên $\frac{EA}{EC} = \frac{BA}{BC} \Rightarrow \frac{EA}{EA+EC} = \frac{BA}{BA+BC}$	0,25
$\Rightarrow EA = \frac{BA}{BA+BC} \cdot AC = \frac{b \cdot c}{c+a}$	0,25
AO là phân giác của ABE nên: $\frac{OB}{OE} = \frac{AB}{AE} \Rightarrow \frac{BO}{BE} = \frac{AB}{AB+AE} = \frac{c}{c + \frac{bc}{c+a}} = \frac{c+a}{a+b+c}$	0,50
Tương tự: $\frac{OC}{OF} = \frac{b+a}{a+b+c}$	0,25
Từ $\frac{OB \cdot OC}{BE \cdot CF} = \frac{1}{2}$ được $\frac{(c+a)(b+a)}{(a+b+c)^2} = \frac{1}{2}$	0,25
$2(c+a)(b+a) = (a+b+c)^2$ $2cb + 2ca + 2ab + 2a^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$ $a^2 = b^2 + c^2$ Vậy $\Delta ABC$ vuông tại A (Theo pitago đảo)	0,50

**Bài 4 (2,5 điểm):**

Tam giác BKC có BF vừa là phân giác vừa là đường cao nên F là trung điểm của CK.	0,25
$\Rightarrow DF$ là trung bình của tam giác CKA $\Rightarrow DF \parallel AB$	0,25
$\Rightarrow DM$ là trung bình của tam giác CBA $\Rightarrow M$ là trung điểm của BC	0,25
Từ $DF \parallel AB$ được $\frac{EA}{DE} = \frac{AB}{DF} \Rightarrow \frac{EA-DE}{DE} = \frac{AB-DF}{DF}$	0,25
Thay $AB = AK + KB = 2DF + KB$ vào được:	0,25
$\frac{DA}{DE} = \frac{2DF+KB-DF}{DF} = 1 + \frac{BK}{DF}$ (*)	0,50
Từ $DF \parallel BK$ được $\frac{GB}{GD} = \frac{BK}{DF} \Rightarrow \frac{GB+GD}{GD} = \frac{BK+DF}{DF} \Rightarrow \frac{DB}{GD} = 1 + \frac{BK}{DF}$	0,25
Từ (*) có $\frac{DC}{DE} = 1 + \frac{BK}{DF}$ (Do $DA = DC$ )	0,25
$\Rightarrow \frac{DA}{DE} = \frac{DB}{DG} \Rightarrow GE$ song song với $BC$ (Theo Talet đảo).	0,25

---

**Bài 2 (2,0 điểm):**

Giải phương trình sau:

a)  $(x^2 - 6x)^2 - 2(x - 3)^2 = 17$

b)

**Bài 2 (1,5 điểm):**

$(x^2 - 6x)^2 - 2(x^2 - 6x + 9) = 17$	0,50
$(x^2 - 6x)^2 - 2(x^2 - 6x) = 17 + 18$	
Đặt $y = x^2 - 6x$ được: $y^2 - 2y = 35$	0,25
Giải: $y^2 - 2y = 35$ được: $y = 7; y = -5$	0,25
Với $y = 7$ : Giải: $x^2 - 6x - 7 = 0$ được $x = -1$ và $x = 7$	0,25
Với $y = -5$ : Giải $x^2 - 6x + 5 = 0$ được $x = 1$ và $x = -5$	0,25