CHUYÊN ĐỀ TỔ HỢP XÁC SUẤT

Chuyên đề 05

TỔ HỢP-XÁC SUẤT

PHẦN 1: TỔ HỢP

A. TÓM TẮT KIẾN THỨC

I. Quy tắc đếm

1. Quy tắc cộng: Giả sử công việc có thể tiến hành theo một trong hai phương án A và B. Phương án A có thể thực hiện bởi n cách; phương án B có thể thực hiện bởi m cách. Khi đó, công việc được thực hiện theo n + m cách.

2. Quy tắc nhân: Giả sử công việc bao gồm hai công đoạn A và B. Công đoạn A có thể thực hiện bởi n cách; công đoạn B có thể thực hiện bởi m cách. Khi đó, công việc được thực hiện bởi n.m cách.

II. Hoán vị – Chỉnh hợp – Tổ hợp

1. Hoán vị:

a. Định nghĩa: Cho tập A có n phần tử. Mỗi sự sắp xếp của n phần tử đó theo một thứ tự định trước là một phép hoán vị các phần tử của tập A.

b. Định lý: Số phép hoán vị của tập hợp có n phần tử , kí hiệu P_n là: $P_n = n! = 1.2.3\ldots n$

2. Chỉnh hợp:

a. Định nghĩa: Cho tập hợp A có n phần tử. Xét số $k \in \mathbb{N}$ mà $1 \le k \le n$. Khi lấy ra k phần tử trong số n phần tử rồi đem sắp xếp k phần tử đó theo một thứ tự định trước, ta được một phép chỉnh hợp chập k của n phần tử.

b. Định lý: Số phép chỉnh hợp chập k của n phần tử, kí hiệu A_n^k là: $A_n^k = n.(n-1)\ldots(n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

3. Tổ hợp:

a. Định nghĩa: Cho tập hợp A có n phần tử và số $k \in \mathbb{N}$ mà $1 \le k \le n$. Một tập hợp con của A có k phần tử được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử.

b. Định lý: Số tổ hợp chập k của n phần tử, kí hiệu C_n^k là: $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$

c. Hai tính chất cơ bản của tổ hợp: Cho $a, k \in \mathbb{N}^*$:

- $C_n^k = C_n^{n-k} \qquad (0 \le k \le n)$
- $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1} \quad (1 \le k \le n)$ ***(ĐL pascan)***

III. Khai triển nhị thức Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$
$$= C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^n b^n$$

Nhận xét:

• Trong khai triển nhị thức Newton có n +1 số hạng.
• Trong một số hạng: tổng số mũ của a và b bằng n.
• Các hệ số của khai triểu nhị thức cách đếu số hạng đầu và cuối thì bằng nhau.
• Số hạng tổng quát thứ k + 1 kí hiệu T_{k+1} thì: $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$

• $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$
• $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots + (-1)^k C_n^k + \ldots + (-1)^n C_n^n = 0$

Chú ý:

• $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$ là khai triển theo số mũ của a giảm dần.
• $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$ là khai triển theo số mũ của a tăng dần.

Đặc biệt:

• $(a-b)^n = [a+(-b)]^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} (-b)^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k a^{n-k} b^k$
• $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k . x^k = C_n^0 + C_n^1 . x + \ldots + C_n^n . x^n$
• $(1-x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k x^k = C_n^0 - C_n^1 . x + \ldots + (-1)^k C_n^n . x^n$

B. CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN

✪ Dạng 1: Bài toán về quy tắc đếm

Phương pháp: *Cần phân biệt công việc phải làm được tiến hành theo phương án A hoặc B để chọn quy tắc cộng, hoặc bao gồm công đoạn A và B để chọn quy tắc nhân.*

Ví dụ1: Bạn X vào siêu thị để mua một áo sơ mi, thoe cỡ 40 hoặc 41. Cỡ 40 có 3 màu khác nhau, cỡ 41 có 4 màu khác nhau. Hỏi X có bao nhiêu cách chọn?

Giải

Bạn X có hai phương án để chọn:
Phương án A cỡ 40: Có 3 cách chọn (chọn theo 3 màu);
Phương án B cỡ 41: Có 4 cách chọn.
Vậy X có 3 + 4 = 7 cách chọn.

Ví dụ 2: Cho tập $A = \{0;1;2;3;4\}$. Có bao nhiêu số chẵn mà mỗi số gồm ba chữ số khác nhau chọn trong số các phần tử của A?

Giải

✰ ***Cách 1:*** Gọi số cần tìm dạng: $\overline{abc}$ với c phải chia hết cho 2. Ta có hai phương án chọn số chẵn:

Phương án A: Chọn số chẵn tận cùng bằng 0 (dạng $\overline{ab0}$)
Chọn $b \in A \setminus \{0\}$: có 4 cách chọn
Chọn $a \in A \setminus \{a, 0\}$: có 3 cách chọn
Vậy phương án A có: 4.3 = 12 cách chọn

Phương án B: Chọn số chẵn tận cùng khác 0.
Chọn $c \in \{2; 4\}$: có 2 cách chọn
Chọn $a \in A \setminus \{c; 0\}$: có 3 cách chọn
Chọn $b \in A \setminus \{a, c\}$: có 3 cách chọn
Vậy phương án B có: 2.3.3 = 18 cách chọn
Vậy có tất cả: 12 + 18 = 30 số chẵn được lập từ A

✰ ***Cách 2:***

- Số có ba chữ số khác nhau lập từ A là: $\overline{abc}$
Chọn $a \in A \setminus \{0\}$: có 4 cách chọn
Chọn $b \in A \setminus \{a\}$: có 4 cách chọn
Chọn $c \in A \setminus \{a, b\}$: có 3 cách chọn
Vậy có: 4.4.3 = 48 số có 3 chữ số lập từ A (1)

- Số lẻ có ba chữ số khác nhau lập từ A là: $\overline{abc}$ (c phải là số lẻ)

Chọn $c \in \{1;3\}$: có 2 cách chọn

Chọn $a \in A \setminus \{c, 0\}$: có 3 cách chọn

Chọn $b \in A \setminus \{a, c\}$: có 3 cách chọn

Vậy có: 2.3.3 = 18 số lẻ có ba chữ số lập từ A. (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra: Số chẵn có ba chữ số lập từ A là: 48 – 18 = 30 số

Ví dụ 3: Từ tập $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ hỏi có thể lập được bao nhiêu số có 7 chữ số sao cho chữ số 1 xuất hiện 3 lần, còn các chữ số khác xuất hiện một lần?

Giải

Số có 7 chữ số nên có 7 vị trí

Vậy ta lấy các phần tử của A cho vào các vị trí này sao cho thỏa mãn đề bài

Cho số 2 vào 7 vị trí: ta có 7 cách chọn

Cho số 3 vào các vị trí còn lại: có 6 vị trí chọn

Cho số 4 vào các vị trí còn lại sau khi cho số 2, 3: có 5 vị trí để chọn

Cho số 5 vào các vị trí còn lại sau khi đã cho số 2, 3, 4: có 4 vị trí để chọn

Còn lại 3 số 1 và 3 vị trí còn lại có 1 cách chọn

Vậy có: 7.6.5.4.1 = 840 số

Dạng 2: Thực hiện phép hoán vị

Phương pháp:

* Sử dụng phép xếp đặt của n phần tử có thứ tự: P_n = n! = 1.2.3…n

* Thực hiện quy tắc cộng hoặc quy tắc nhân

Ví dụ: Bạn X mời hai bạn nam và ba bạn nữ dự tiệc sinh nhật. Bạn định xếp nam, nữ ngồi riêng trên các chiếc ghế, xếp theo một hàng dài. Hỏi X có bao nhiêu cách xếp đặt?

Giải

Đây là bài toán hoán vị.

Xếp 2 bạn nam vào hai ghế kề nhau:có2!cách xếp.

Xếp ba bạn nữ vào ba ghế kề nhau: có 3! cách xếp.

Xếp theo nhóm nam, nữ: có 2! cách xếp.

Vậy số cách xếp là: 2!.(2!3!) = 24 cách.

Dạng 3: Thực hiện phép chỉnh hợp

Phương pháp : Phép xếp đặt có thứ tự của k phần tử trong n phần tử:

$$A_n^k = n.(n-1)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Ví dụ1: Trong mặt phẳng cho 7 điểm A, B, C, D, E, M, N khác nhau. Có bao nhiêu vecto nối hai điểm trong các điểm đó?

Giải

Mỗi vecto là một chỉnh hợp chập 2 của tập hợp gồm 7 điểm.

Số vecto muốn tìm là số chỉnh hợp chập 2 của 7: $A_7^2 = 7.6 = 42$ (vectơ).

Ví dụ 2: Từ tập $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ có thể lập được bao nhiêu số có 4 chữ số khác nhau?

Giải:

Gọi số cần tìm là $\overline{abcd}$

Có $a \in A \setminus \{0\}$: có 5 cách chọn

$\overline{bcd}$ là một chỉnh hợp chập 3 của tập A\{a}: có A_5^3

Vậy có $5.A_5^3 = 300$ số

Dạng 4: Thực hiện phép tổ hợp

Phương pháp: Phép xếp đặt không có thứ tự của k phần tử chọn trong n phần tử:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (0 \le k \le n)$$

Ví dụ: Cho7 điểm phân biệt không tồn tại ba điểm thẳng hàng. Từ 7 điểm trên lập được bao nhiêu tam giác?

Giải

Một tam giác gồm 3 đỉnh (không cần thứ tự) chọn trong 7 điểm. Như vậy để tạo một tam giác xem như chọn một tập còn gồm 3 phần tử trong số 7 phần tử.

Số tam giác là số tổ hợp chập 3 của 7: $C_7^3 = \frac{7!}{3!4!} = 35$ (tam giác)

Dạng5: Tìm trong phương trình chứa P_n, A_n^k, C_n^k

Phương pháp: Dùng các công thức:

$P_n = n!\ \ (n \ge 1);\ \ A_n^k = n(n-1)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$

$(1 \le k \le n);\ \ C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}\ \ (0 \le k \le n)$

Ví dụ 1: Tìm $n \in \mathbb{N}^*$, nếu có: $\frac{2P_n}{P_{n-1}} = A_n^3 \quad (1)$.

Giải

Điều kiện: $n \ge 3$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{2.n!}{(n-1)!} = n.(n-1)(n-2) \Leftrightarrow 2 = (n-1)(n-2)$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 3n = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} n = 0 & (\text{loai}) \\ n = 3 & (\text{nhân}) \end{array}\right.$$

Vậy n = 3.

Ví dụ 2: Tìm $n \in \mathbb{N}^*$, nếu có: $6n - 6 + C_n^3 \ge C_{n+1}^3$. (2)

Giải

Điều kiện: $n \ge 3$.

$(2) \Leftrightarrow 6n - 6 + C_n^3 \ge C_n^2 + C_n^3 \Leftrightarrow 6n - 6 \ge C_n^2$

$\Leftrightarrow 6(n-1) \ge \frac{n!}{2!(n-2)!} \Leftrightarrow n^2 - 13n + 12 \le 0 \Leftrightarrow 1 \le n \le 12 \quad (3)$

Từ (2) và (3) ta có: $3 \le n \le 12$.

Vậy $n \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.

➢ *BÀI TẬP NGUYÊN LÝ ĐẾM – HOÁN VỊ – CHỈNH HỢP – TỔ HỢP*

Bài 1: **(ĐHQG TPHCM khối A đợt 1 1999)**

Cho tập hợp A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}

a) Có bao nhiêu tập con X của tập A thoả điều kiện X chứa 1 và không chứa 2.

b) Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm 5 chữ số đôi một khác nhau lấy từ tập A và không bắt đầu bởi 123.

Giải

a) Gọi X là tập cần tìm ,ta có

$$\begin{cases} X \subset A \\ 1 \in X \\ 2 \notin X \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = \{1\} \cup Y \\ Y \subset \{3,4,5,6,7,8\} \end{cases}$$

* Do đó số các tập X bằng số các tập con Y của tập hợp {3,4,5,6,7,8} Mà số các tập con Y của {3,4,5,6,7,8} là: $2^6 = 64$.

* Vậy có 64 tập con X của A chứa 1và không chứa 2.

b) Gọi

* m là số các số tự nhiên chẵn gồm 5 chữ số đôi một khác nhau lấy từ A.

* n là số các số tự nhiên chẵn gồm 5 chữ số đôi một khác nhau lấy từ A và bắt đầu bởi 123.

* p là số các số tự nhiên thoả mãn yêu cầu đề bài.

Ta cần tính p. Hiển nhiên p = m – n

• Tính m: Lập một số chẵn $\overline{a_5a_4a_3a_2a_1}$ gồm 5 chữ số khác nhau a_1,

Lấy a_2, a_3, a_4, a_5 từ 7 số còn lại của A

$\Rightarrow$ có A_7^4 = 7.6.5.4 = 840 cách

Do đó: m = 4.840 = 3360.

• Tính n: Lập một số chẵn $\overline{123a_2a_1}$ bắt đầu bởi 123; $a_1, a_2 \in A$; $a_1 \neq a_2$

Lấy a_1 từ {4,6,8} $\Rightarrow$ có 3 cách

Lấy a_2 từ A \ {1,2,3,a1} $\Rightarrow$ có 4 cách

Do đó: n = 3.4 = 12

Vậy: số p cần tìm là: p = 3360 – 12 = 3348

Bài 2: **(ĐHQG TPHCM khối D đợt 1 1999)**
Một học sinh có 12 cuốn sách đôi một khác nhau, trong đó có 2 cuốn sách Toán, 4 cuốn sách Văn và 6 cuốn sách Anh. Hỏi có bao nhiêu cách xếp tất cả các cuốn sách lên một kệ sách dài, nếu các cuốn sách cùng môn được xếp kề nhau?

Giải

Bước 1: Đặt 3 nhóm sách lên kệ dài: 3! cách

Bước 2: Trong mỗi nhóm ta có thể thay đổi cách xếp đặt sách: Nhóm sách Toán: 2! cách

Nhóm sách Văn: 4! cách

Nhóm sách Anh: 6! cách

Kết luận: có 3!2!4!6! = 6.2.24.720 = 207360 cách.

Bài 3: **(ĐHQG TPHCM khối D đợt 2 1999)**
Một bàn dài có hai dãy ghế đối diện nhau, mỗi dãy có 6 ghế. Người ta muốn xếp chỗ ngồi cho 6 học sinh trường A và 6 học sinh trường B vào bàn nói trên. Hỏi có bao nhiêu cách xếp trong mỗi trường hợp sau:
a) Bất cứ 2 học sinh nào ngồi cạnh nhau hoặc đối diện nhau thì khác trường với nhau
b) Bất cứ 2 học sinh nào ngồi đối diện nhau thì khác trường với nhau.

Giải

a) Giai đoạn 1: Xếp chỗ ngồi cho hai nhóm học sinh, có 2 cách xếp:

Giai đoạn 2: Trong nhóm học sinh của trường A, có 6! cách xếp các em vào 6 chỗ.

Tượng tự, có 6! cách xếp 6 học sinh trường B vào 6 chỗ.

Kết luận: có 2.6!6! = 1036800 cách

b) Học sinh thứ nhất trường A ngồi trước: có 12 cách chọn ghế để ngồi.

Sau đó, chọn học sinh trường B ngồi đối diện với học sinh thứ nhất trường A: có 6 cách chọn học sinh trường B.

Học sinh thứ hai của trường A còn 10 chỗ để chọn, chọn học sinh trường B ngồi đối diện với học sinh thứ hai trường A: có 5 cách chọn, v.v…

Vậy: có 12.6.10.5.8.4.6.3.2.1.1 = 2^6.6!.6! = 33177600 cách.

Bài 4: **(ĐHQG TPHCM khối D đợt 2 1999)**
Cho tập X = {0,1,2,3,4,5,6,7}. Có thể lập được bao nhiêu số n gồm 5 chữ số khác nhau đôi một từ X (chữ số đầu tiên phải khác 0) trong mỗi trường hợp sau:
a) n là số chẵn.
b) Một trong ba chữ số đầu tiên phải bằng 1.

Giải

a) Xem các số chẵn hình thức $\overline{abcde}$ (kể cả a = 0), có 4 cách chọn e $\in$ {0,2,4,6}, vì là số chẵn.

Sau đó chọn a, b, c, d từ X \{e},số cách chọn là: A_7^4 = 840

Vậy: có 4.840 = 3360 số chẵn hình thức.

Ta loại những số có dạng $\overline{0bcde}$.Có 3cách chọn e, và A_6^3 cách chọn b, c, d từ X \ {0,e}.

Vậy có : 3 A_6^3 = 360 số chẵn có dạng $\overline{0bcde}$.

*Kết luận:*có3360 – 360=3000số thoả yêu cầu đề bài.

b) n = $\overline{abcde}$

* Xem các số hình thức abcde (kể cả a = 0).Có3 cách chọn vị trí cho 1.Sau đó chọn chữ số khác nhau cho 3 vị trí còn lại từ X \ {1}: có A_7^4 cách.

Vậy có3. A_7^4= 2520 số hình thức thoả yêu cầu đề bài.

* Xem các số hình thức $\overline{0bcde}$.

Có 2 cách chọn vị trí cho 1. Chọn chữ số khác nhau cho 3 vị trí còn lại từ X \ {0,1}, số cách chọn là A_6^3 .Như thế: có 2. A_6^3= 240 số hình thức dạng $\overline{0bcde}$.

Kết luận: số các số n thoả yêu cầu đề bài là:

2520 – 240 = 2280 số

Bài 5: **(ĐH Huế khối A chuyên ban 1999)**
Một hộp đựng 4 viên bi đỏ, 5 viên bi trắng và 6 viên bi vàng. Người ta chọn ra 4 viên bi từ hộp đó. Hỏi có bao nhiêu cách chọn để trong số bi lấy ra không có đủ cả 3 màu?

Giải

Số cách chọn 4 bi trong số 15 bi là: C_{15}^4 = 1365.

Các trường hợp chọn 4 bi đủ cả 3 màu là:

* 2 đỏ + 1 trắng + 1 vàng: có $C_4^2.C_5^1.C_6^1$

* 1 đỏ + 2 trắng + 1 vàng: có $C_4^1.C_5^2.C_6^1$

* 1 đỏ + 1 trắng + 2 vàng: có $C_4^1.C_5^1.C_6^2 = 300$

Do đó số cách chọn 4 bi đủ cả 3 màu là:

180 + 240 + 300 = 720

Vậy số cách chọn để 4 bi lấy ra không đủ 3 màu là: 1365 – 720 =645.

Bài 6: **(ĐH Huế khối D chuyên ban 1999)**
Người ta xếp ngẫu nhiên 5 lá phiếu có ghi số thứ tự từ 1 đến 5 cạnh nhau.
a) Có bao nhiêu cách xếp để các phiếu số chẵn luôn ở cạnh nhau?
b) Có bao nhiêu cách xếp để các phiếu phân thành hai nhóm chẵn lẻ riêng biệt (chẳng hạn 2,4,1,3,5)?

Giải

a) * Xếp các phiếu số 1, 2, 3, 5 có 4! = 24 cách.
 * Sau đó xếp phiếu số 4 vào cạnh phiếu số 2 có 2 cách. Vậy: có 2.24 = 48 cách xếp theo yêu cầu đề bài.
b) * Khi nhóm chẵn ở bên trái, nhóm lẻ ở bên phải. Số cách xếp cho2 số chẵn là 2! cách. Số cách xếp cho 3 số lẻ là: 3! cách. Vậy có 2.6 = 12 cách.
 * Tương tự cũng có 12 cách xếp mà nhóm chẵn ở bên phải, nhóm lẻ ở bên trái.
Vậy: có 12 + 12 = 24 cách.

Bài 7 : **(ĐH Huế khối RT chuyên ban 1999)**
Người ta viết các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 lên các tấm phiếu,sau đó xếp thứ tự ngẫu nhiên thành một hàng.
a) Có bao nhiêu số lẻ gồm 6 chữ số được sắp thành?
b)Bao nhiêu số chẵn gồm 6 chữ số được sắp thành?

Giải

Số có 6 chữ số khác nhau có dạng: $\overline{abcdef}$, với $a \neq 0$
a) Vì số tạo thành là số lẻ nên $f \in \{1, 3, 5\}$.
Do đó:
 f có 3 cách chọn
 a có 4 cách chọn (trừ 0 và f)
 b có 4 cách chọn (trừ a và f)
 c có 3 cách chọn (trừ a, b, f)
 d có 2 cách chọn (trừ a, b, c, f)
 e có 1 cách chọn (trừ a, b, c, d, f)
 Vậy: có 3.4.4.3.2.1 = 288 số
b) Vì số tạo thành là số chẵn nên $f \in \{0, 2, 4\}$.
* Khi f = 0 thì (a,b,c,d,e) là một hoán vị của (1,2,3,4,5). Do đó có 5! số
* Khi $f \in \{2, 4\}$ thì:
 f có 2 cách chọn
 a có 4 cách chọn
 b có 4 cách chọn
 c có 3 cách chọn
 d có 2 cách chọn
 e có 1 cách chọn
Do đó có 2.4.4.3.2.1 = 192 số
Vậy: có 120 + 192 = 312 số chẵn

Bài 8: **(HV Ngân hàng TPHCM 1999)**
Xét những số gồm 9 chữ số, trong đó có năm chữ số 1 và bốn chữ số còn là 2, 3, 4, 5. Hỏi có bao nhiêu số như thế, nếu:
a) Năm chữ số 1 được xếp kề nhau.
b) Các chữ số được xếp tuỳ ý.

Giải.

a) Gọi 11111 là số a. Vậy ta cần sắp các số a, 2, 3, 4, 5. Do đó số có 9 chữ số trong đó có 5 chữ số 1 đứng liền nhau là: 5! = 120 số.
b) Lập một số có 9 chữ số thoả mãn yêu cầu; thực chất là việc xếp các số 2, 3, 4, 5 vào 4 vị trí tuỳ ý trong 9 vị trí (5 vị trí còn lại đương nhiên dành cho chữ số 1 lặp 5 lần).

Bài 9: **(ĐH Hàng hải 1999)**
Có bao nhiêu cách sắp xếp năm bạn học sinh A, B, C, D, E vào một chiếc ghế dài sao cho:
a) Bạn C ngồi chính giữa.
b) Hai bạn A và E ngồi ở hai đầu ghế

Giải

a) Xếp C ngồi chính giữa: có 1 cách.
Xếp A, B, D, E vào 4 chỗ còn lại: có 4! = 24 cách. Vậy: có 24 cách xếp thoả yêu cầu.
b) Xếp A và E ngồi ở hai đầu ghế: có 2! = 2 cách.
Xếp B, C, D vào 3 chỗ còn lại: có 3! = 6 cách. Vậy: có 2.6 = 12 cách xếp thoả yêu cầu.

Bài 10: **(HV BCVT 1999)**
Hỏi từ 10 chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 có thể lập được bao nhiêu số gồm 6 chữ số khác nhau, sao cho trong các chữ số đó có mặt số 0 và 1.

Giải

* Số các số có 6 chữ số khác nhau là:
$A_{10}^6 - A_{10}^5 = 9.9.8.7.6.5 = 136080$
* Số các số có 6 chữ số khác nhau và đều khác 0 là:
$A_9^6 = 9.8.7.6.5.4 = 60480$
* Số các số có 6 chữ số khác nhau và đều khác 1 là:
$A_9^6 - A_9^5 = 8.8.7.6.5.4 = 53760$
* Vậy số các số có 6 chữ số khác nhau trong đó đều có mặt 0 và 1 là:
 136080 – 60480 – 53760 = 21840 số

➢ *BÀI TẬP TƯƠNG TỰ*

Bài 1: (ĐH khối B 2005)
Một đội thanh niên tình nguyện có 15 người, gồm 12 nam và 3 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách phân công đội thanh niên tình nguyện đó về giúp đỡ 3 tỉnh miền núi, sao cho mỗi tỉnh có 4 nam và 1 nữ.
ĐS: 207900 cách phân

Bài 2: (ĐH khối A 2005 dự bị 1)
Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên, mỗi số gồm 6 chữ số khác nhau và tổng các chữ số hàng chục, hàng trăm, hàng ngàn bằng 8.
ĐS: 720 + 720 = 1440 số x.

Bài 3: (ĐH khối B 2005 dự bị 1)
Một đội văn nghệ có 15 người gồm 10 nam và 5 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách lập một nhóm đồng ca gồm 8 người, biết rằng trong nhóm đó phải có ít nhất 3 nữ.
ĐS: 2520 + 1050 + 120 = 3690 cách.

Bài 4: (ĐH khối B 2005 dự bị 2)
Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên, mỗi số gồm 5 chữ số khác nhau và nhất thiết phải có 2 chữ số 1, 5.
ĐS: 20.60 = 1200 số.

Bài 5: (ĐH khối D 2006)

Đội thanh niên xung kích của một trường phổ thông có 12 học sinh, gồm 5 học sinh lớp A, 4 học sinh lớp B và 3 học sinh lớp C. Cần chọn 4 học sinh đi làm nhiệm vụ, sao cho 4 học sinh này thuộc không quá 2 trong 3 lớp trên. Hỏi có bao nhiêu cách chọn như vậy? ***ĐS:*** 495 – 270 = 225 cách

Bài 6: (CĐ GTVT III khối A 2006)

Từ một nhóm gồm 15 học sinh khối A, 10 học sinh khối B, 5 học sinh khối C, chọn ra 15 học sinh sao cho có ít nhất 5 học sinh khối A và đúng 2 học sinh khối C. Tính số cách chọn. ***ĐS:*** 51861950

Bài 7: (CĐ Tài chính – Hải quan A 2006)

Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số, trong đó chữ số 0 có mặt đúng 2 lần, chữ số 1 có mặt đúng 1 lần và hai chữ số còn lại phân biệt? ***ĐS:***

Bài 8: (CĐ Xây dựng số 3 khối A 2006)

Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm hai chữ số khác nhau? Tính tổng của tất cả các số đó.

ĐS: 45.54 – 220 = 2210

Bài 9: (CĐBC Hoa Sen khối D 2006)

Cho 2 đường thẳng d_1, d_2 song song với nhau. Trên đường thẳng d_1 cho 10 điểm phân biệt, trên đường thẳng d_2 cho 8 điểm phân biệt. Hỏi có thể lập được bao nhiêu tam giác mà 3 đỉnh của mỗi tam giác lấy từ 18 điểm đã cho. ***ĐS:*** 640 tam giac.

Bài 49: (ĐH khối B 2004)

Trong một môn học, thầy giáo có 30 câu hỏi khác nhau gồm 5 câu hỏi khó, 10 câu hỏi trung bình, 15 câu hỏi dễ. Từ 30 câu hỏi đó có thể lập được bao nhiêu đề kiểm tra, mỗi đề gồm 5 câu hỏi khác nhau và nhất thiết phải có đủ 3 loại câu hỏi (khó, trung bình, dễ) và số câu hỏi dễ không ít hơn 2.

ĐS: 23625 + 10500 + 22750 = 56875 đề.

Bài 11: (ĐH Đà Lạt khối ADV 2000)

Có 5 thẻ trắng và 5 thẻ đen, đánh dấu mỗi loại theo các số 1, 2, 3, 4,5. Có bao nhiêu cách sắp xếp tất cả các thẻ này thành một hàng sao cho hai thẻ cùng màu không nằm liền nhau. ***ĐS:*** 5!5! + 5!5!

Bài 12: (ĐH Sư phạm HN 2 khối A 2000)

Có thể lập được bao nhiêu số gồm 8 chữ số từ các chữ số: 1, 2, 3, 4,5, 6 trong đó các chữ số 1 và 6 đều có mặt 2 lần, các chữ số khác có mặt 1 lần.

ĐS: 10080

Bài 13 (ĐH Sư phạm Vinh khối ABE 2000)

Có bao nhiêu số khác nhau gồm 7 chữ số sao cho tổng các chữ số của mỗi số là một số chẵn.

ĐS: 45.10^5

Bài 14 (ĐH Sư phạm Vinh khối DGM 2000)

Tìm tất cả các số tự nhiên có đúng 5 chữ số sao cho trong mỗi số đó chữ số đứng sau lớn hơn chữ số đứng liền trước. ***ĐS:*** 126.

Bài 15 (HV Kỹ thuật quân sự 2000)

Một đồn cảnh sát khu vực có 9 người. Trong ngày, cần cử 3 người làm nhiệm vụ ở địa điểm A, 2 người ở địa điểm B, còn 4 người thường trực tại đồn. Hỏi có bao nhiêu cách phân công? ***ĐS:*** 1260

Bài 16 (ĐH GTVT 2000)

Một lớp học có 20 học sinh, trong đó có 2 cán bộ lớp. Hỏi có bao nhiêu cách cử 3 người đi dự hội nghị Hội sinh viên của trường sao cho trong 3 người đó có ít nhất một cán bộ lớp. ***ĐS:*** 324

Bài 17(HV Quân y 2000)

Xếp 3 viên bi đỏ có bán kính khác nhau và 3 viên bi xanh giống nhau vào một dãy 7 ô trống. Hỏi:

1. Có bao nhiêu cách xếp khác nhau?
2. Có bao nhiêu cách xếp khác nhau sao cho 3 viên bi đỏ xếp cạnh nhau và 3 viên bi xanh xếp cạnh nhau?

ĐS: 1) 840 : 2) 6.3!

Bài 18: (ĐH Cảnh sát khối G CPB 2000)

Có bao nhiêu số lẻ gồm 6 chữsố, chia hết cho 9?

ĐS: 50000

Bài 19: (ĐH Cảnh sát G CB 2000)

Có bao nhiêu số lẻ gồm 6 chữ số khác nhau lớn hơn 500000? ***ĐS:*** 40320 + 16800 = 57120

Bài 20: (CĐSP Nha Trang 2000)

Với các số: 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể thành lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 4 chữ số khác nhau và trong đó phải có mặt chữ số 0. ***ĐS:*** 300 – 120 = 180

Bài 21: (CĐSP Nhà trẻ – MG TƯ I 2000)

Một lớp học sinh mẫu giáo gồm 15 em, trong đó có 9 em nam, 6 em nữ. Cô giáo chủ nhiệm muốn chọn một nhóm 5 em để tham dự trò chơi gồm 3 em nam và 2 em nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn? ***ĐS:*** 1260

Bài 22: (ĐH An ninh khối D 2001)

Cho các chữ số 0, 1, 2, 3, 4. Hỏi có thể thành lập được bao nhiêu số có bảy chữ số từ những chữ số trên, trong đó chữ số 4 có mặt đúng3 lần, còn các chữ số khác có mạt đúng 1 lần. ***ĐS:*** 6.20.6 = 720

Bài 23: (ĐH Cần Thơ 2001)

Một nhóm gồm 10 học sinh, trong đó có 7 nam và 3 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp 10 học sinh trên thành một hàng dài sao cho 7 học sinh nam phải đứng liền nhau.

ĐS: 4!7! = 120960

Bài 24: (HV Chính trị quốc gia 2001)

Một đội văn nghệ có 10 người, trong đó có 6 nữ và 4 nam.

1. Có bao nhiêu cách chia đội văn nghệ thành hai nhóm có số người bằng nhau và mỗi nhóm có số nữ như nhau.
2. Có bao nhiêu cách chọn ra 5 người mà trong đó không có quá 1 nam.

ĐS: 1) 120 2) 6 + 60 = 66.

Bài 25: (ĐH Giao thông vận tải 2001)

Cho 8 chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Hỏi có thể lập được bao nhiêu số gồm 6 chữ số khác nhau, trong đó nhất thiết phải có mặt chữ số 4. ***ĐS:*** 2520 + 10800 = 13320

Bài 26: (ĐH Huế khối ABV 2001)

Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 4 chữ số sao cho không có chữ số nào lặp lại đúng 3 lần?

ĐS: 9000 – 324 = 8676

Bài 27: (ĐH Huế khối DHT 2001)

Từ một nhóm học sinh gồm 7 nam và 6 nữ, thầy giáo cần chọn ra 5 em tham dự lễ mittinh tại trường với yêu cầu có cả nam và nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn?

ĐS: 1287 – (21 + 6) = 1260

Bài 28: (HV Kỹ thuật quân sự 2001)

Trong số 16 học sinh có 3 học sinh giỏi, 5 khá, 8 trung bình. Có bao nhiêu cách chia số học sinh đó thành 2 tổ,

mỗi tổ có 8 người sao cho ở mỗi tổ đều có học sinh giỏi và mỗi tổ có ít nhất 2 học sinh khá.
ĐS: 1680 + 2100 = 3780 cách

Bài 29: (ĐH Kinh tế quốc dân 2001)
Với các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên mà mỗi số có 5 chữ số khác nhau và trong đó phải có chữ so 5 . **ĐS:** 960 + 600 = 1560 số

Bài 30: (HV Ngân hàng TPHCM - A 2001)
1. Có thể tìm được bao nhiêu số gồm 3 chữ số khác nhau đôi một?
2. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 có thể lập được bao nhiêu số chẵn có 5 chữ số đôi một khác nhau?
ĐS: 840 + 2160 = 3000

Bài 31: (ĐH Ngoại thương TPHCM - A 2001)
Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể thiết lập được bao nhiêu số có 6 chữ số khác nhau mà hai chữ số 1 và 6 không đứng cạnh nhau? **ĐS:** á720 – 240 =

Bài 32: (Nông nghiệp I HN khối A 2001)
Có 6 học sinh nam và 3 học sinh nữ xếp thành một hàng dọc. Hỏi cobao nhiêu cách xếp để có đúng 2 học sinh nam đứng xen kẽ 3 học sinh nữ. (Khi đổi chỗ 2 học sinh bất kì cho nhau ta được một cách xếp mới). **ĐS:** 5.3!.6! = 21600 cách

Bài 33: (HV Quan hệ quốc tế 2001)
Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 có thể lập được bao nhiêu số có 9 chữ số mà chữ số 9 đứng ở vị trí chính giữa? **ĐS:** 8! = 40320

Bài 34: (ĐH Quốc gia TPHCM 2001)
1. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 6 chữ số đôi một khác nhau, trong đó có mặt chữ số 0 nhưng không có mặt chữ số 1.
2. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 7 chữ số, biết rằng chữ số 2 có mặt đúng 2 lần, chữ số 3 có mặt đúng 3 lần và các chữ số còn lại có mặt không quá một lần.
ĐS: 11760 – 420 = 11340 số.

Bài 35: (ĐHSP HN II 2001)
Tính tổng tất cả các số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau đôi một được lập từ 6 chữ số 1, 3, 4, 5, 7, 8.
ĐS: 3732960.

Bài 36: (ĐHSP TPHCM khối DTM 2001)
Cho A là một hợp có 20 phần tử.
1. Có bao nhiêu tập hợp con của A?
2. Có bao nhiêu tập hợp con khác rỗng của A mà có số phần tử là số chẵn?

Bài 37: (ĐH Thái Nguyên khối D 2001)
1. Có bao nhiêu số chẵn có ba chữ số khác nhau được tạo thành từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5. **ĐS** 24
2. Có bao nhiêu số có ba chữ số khác nhau được tạo thành từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 mà các số đó nhỏ hơn số 345. **ĐS:** 40 + 10

Bài 38: (ĐH Văn Lang 2001)
Một lớp có 10 học sinh nam và 10 học sinh nữ. Cần chọn ra 5 học sinh để đi làm công tác "Mùa hè xanh". Hỏi có bao nhiêu cách chọn nếu trong 5 học sinh đó phải có ít nhất:
1. Hai học sinh nữ và hai học sinh nam.
2. Một học sinh nữ và một học sinh nam.
ĐS: 15000 cách.

Bài 39: (ĐH Y HN 2001)
Với các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 có thể lập được bao nhiêu số chẵn có ba chữ số khác nhau và không lớn hơn 789? **ĐS:** 105 + 18 + 42 + 6 = 171

Bài 40: (ĐH khối D dự bị 1 2002)
Đội tuyển học sinh giỏi của một trường gồm 18 em, trong đó có 7 học sinh khối 12, 6 học sinh khối 11, 5 học sinh khối 10. Hỏi có bao nhiêu cách cử 8 học sinh trong đội đi dự trại hè sao cho mỗi khối co ít nhất một em được chọn. **ĐS:**

Bài 41: (ĐH khối A 2003 dự bị 2)
Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên mà mỗi số có 6 chữ số khác nhau và chữ số 2 đứng cạnh chữ số 3.
ĐS: $2(P_5 - P_4) = 192$ số.

Bài 42: (ĐH khối B 2003 dự bị 1)
Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5,6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên mà mỗi số có 6 chữ số và thoả mãn điều kiện: sáu chữ số của mỗi số là khác nhau và trong mỗi số đó tổng của 3 chữ số đầu nhỏ hơn tổng của 3 chữ số cuối một đơn vị. **ĐS:** 3.3!.3! =108

Bài 43: (ĐH khối B 2003 dự bị 2)
Từ một tổ gồm 7 học sinh nữ và 5 học sinh nam cần chọn ra 6 em trong đó số học sinh nữ phải nhỏ hơn 4. Hỏi có bao nhiêu cách chọn như vậy?
ĐS: 7 + 5.21 + 10.35 = 462

Bài 44: (ĐH khối D 2003 dự bị 1)
Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn mà mỗi số gồm 7 chữ số khác nhau? **ĐS:** 90720

Bài 45: (CĐ Sư phạm khối A 2002)
1. Tìm số giao điểm tối đa của: a) 10 đường thẳng phân biệt. b) 6 đường tròn phân biệt.
2. Từ kết quả của câu 1) hãy suy ra số giao điểm tối đa của tập hợp các đường nói trên.
ĐS: 1) 45 điểm ; 2) 45 + 30 + 120 = 195 điểm

Bài 46: (CĐ Sư phạm khối A 2002 dự bị)
Cho đa giác lồi n cạnh. Xác định n để đa giác có số đường chéo gấp đôi số cạnh. **ĐS:** n = 7.

Bài 47: (CĐ Xây dựng số 3 – 2002)
Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số gồm 3 chữ số khác nhau và nhỏ hơn 245. **ĐS:** 6+2=8 số

Bài 48: (CĐ Sư phạm Quảng Ngãi 2002)
Từ 5 chữ số 0, 1, 2, 5, 9 có thể lập được bao nhiêu số lẻ, mỗi số gồm 4 chữ số khác nhau. **ĐS:** 3.3.3.2 = 54

Bài 49: Tìm n biết: $C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^{n} = 7(n+3)$

Bài 50: (ĐHBKHN-2000) Giải bất phương trình:
$\frac{1}{2}A_{2x}^2 - A_x^2 \le \frac{6}{x}C_x^3 + 10$ **ĐS:** $x \in \{3; 4\}$

Bài 51: (ĐH Hàng hải 99)
Giải bất phương trình: $\frac{C_{n-1}^{n-3}}{A_{n+1}^4} > \frac{1}{14P_3}$

ĐS : $n \in \{3, 4, 5\}$.

✪ *Dạng 6: Tìm phần tử đặc biệt trong khai triển của (a + b)ⁿ.*

Phương pháp: Sử dụng công thức khai triển của nhị thức Newton:

$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k$

$=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+..+C_n^ka^{n-k}b^k+..+C_n^nb^n$

(khai triển theo lũy thừa của a tăng, b giảm)

(***Chú ý:*** $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^k b^{n-k}$ khai triển theo lũy thừa của a giảm dần, b tăng dần)

Ví dụ 1: Tìm số hạng chứa x^3 trong khai triển $(11+x)^{11}$.

Giải

Cách 1:

Ta có số hạng tổng quát thứ k + 1 trong khai triển trên là: $T_{k+1}=C_{11}^k11^{11-k}x^k\quad(0\le k\le 10)$

Để $x^k=x^3$ thì k = 3, ⇒ số hạng chứa x^3 là: $C_{11}^3 11^8x^3$

Cách 2: $(11+x)^{11}=\sum_{k=0}^{11}C_{11}^k11^{11-k}x^k$

⇒ Để $x^k=x^3$ thì k = 3 ⇒Số hạng chứa x^3là: $C_{11}^3 11^8x^3$

Ví dụ 2: Trong khai triển $\left(2\sqrt[3]{x}-\frac{3}{\sqrt{x}}\right)^{10},(x>0)$

.Hãy tìm số hạng không chứa x.

Giải

Có số hạng tổng quát thứ k + 1 là:

$$T_{k+1}=C_{10}^k\left(2\sqrt[3]{x}\right)^{10-k}\left(-\frac{3}{\sqrt{x}}\right)^k=C_{10}^k\left(2.x^{\frac{1}{3}}\right)^{10-k}\left(-\frac{3}{x^{\frac{1}{2}}}\right)^k$$

$$=C_{10}^k2^{10-k}(-3)^k\frac{x^{\frac{10-k}{3}}}{x^{\frac{k}{2}}}=C_{10}^k2^{10-k}(-3)^kx^{\frac{20-5k}{6}}$$

Để số hạng không chứa x thì $\frac{20-5k}{6}=0\Leftrightarrow k=4$

Vậy số hạng không chứa x là: $C_{10}^4 2^6(-3)^4=4354560$

(Chú ý: $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$*)*

Ví dụ 3: Tìm hệ số của x^8 trong khai triển $\left[1+x^2(1-x)\right]^8$

Giải

Ta có: $\left[1+x^2(1-x)\right]^8=\sum_{k=0}^{8}C_8^k\left[x^2(1-x)\right]^k$

$$=\sum_{k=0}^{8}C_8^kx^{2k}(1-x)^k=\sum_{k=0}^{8}C_8^kx^{2k}\sum_{i=0}^{k}C_k^i(-x)^i$$

$$=\sum_{k=0}^{8}\sum_{i=0}^{k}C_8^kC_k^i(-1)^ix^{2k+i}\ (0\le i\le k\le 8)$$

Để $x^{2k+i}=x^8\Leftrightarrow 2k+i=8\Leftrightarrow k=\frac{8-i}{2}$, k và i là các số nguyên thỏa mãn $(0\le i\le k\le 8)$ ⇒ i = 0; k = 4 và i = 2; k = 3

Vậy hệ số của số hạng chứa x^8 là:

$$C_8^4C_4^0(-1)^0+C_8^3C_3^2(-1)^2=238$$

Ví dụ 4: Cho khai triển:

$(1+2x)^{10}=a_0+a_1x+a_2x^2+..+a_{10}x^{10}$, có các hệ số $a_0,a_1,a_2,...,a_{10}$. Tìm hệ số lớn nhất.

Giải

Ta có:

$(1+2x)^{10}=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^k(2x)^k=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^k2^kx^k\quad(0\le k\le 10)$

⇒ Hệ số $a_k=C_{10}^k2^k$

$$\text{Có: }\frac{a_k}{a_{k+1}}=\frac{C_{10}^k2^k}{C_{10}^{k+1}2^{k+1}}=\frac{\frac{10!}{k!(10-k)!}}{\frac{10!}{(k+1)!(9-k)!}.2}$$

$$=\frac{10!}{k!(10-k)!}.\frac{(k+1)!(9-k)!}{2.10!}=\frac{k+1}{2.(10-k)}\quad(0\le k\le 9)$$

Để $a_k<a_{k+1}\Leftrightarrow\frac{a_k}{a_{k+1}}<1\Leftrightarrow\frac{k+1}{2.(10-k)}<1$

$\Leftrightarrow k+1<20-2k\Leftrightarrow k<6+\frac{1}{3}$

⇒với $k<6+\frac{1}{3}\Leftrightarrow a_k<a_{k+1}$

$\Rightarrow a_0<a_1<a_2<a_3<a_4<a_5<a_6<a_7\quad(1)$

Lại có: $a_k>a_{k+1}\Leftrightarrow k>6+\frac{1}{3}\Rightarrow a_7>a_8>a_9>a_{10}\quad(2)$

Từ (1) và (2) ⇒ hệ số lớn nhất là: $a_7=C_{10}^72^7=15360$

Ví dụ 5: (ĐH SPHN-2001) Cho khai triển nhị thức:

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}x\right)^{10}=a_0+a_1x+...+a_9x^9+a_{10}x^{10}.$$

Hãy tìm số hạng a_k lớn nhất.

Giải:

Ta có: $\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}x\right)^{10}=\frac{1}{3^{10}}(1+2x)^{10}=\frac{1}{3^{10}}\sum_{k=0}^{10}C_{10}^k(2x)^k$

$\Rightarrow a_k=\frac{1}{3^{10}}C_{10}^k2^k$

Ta có a_k đạt được max

$$\Rightarrow\begin{cases}a_k\ge a_{k+1}\\a_k\ge a_{k-1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C_{10}^k2^k\ge C_{10}^{k+1}2^{k+1}\\C_{10}^k2^k\ge C_{10}^{k-1}2^{k-1}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{2^k10!}{k!(10-k)!}\ge\frac{2.2^k10!}{(k+1)!(9-k)!}\\\frac{2.2^{k-1}10!}{k!(10-k)!}\ge\frac{2^{k-1}10!}{(k-1)!(11-k)!}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{10-k}\ge\frac{2}{k+1}\\\frac{2}{k}\ge\frac{1}{11-k}\end{cases}\Leftrightarrow\frac{19}{3}\le k\le\frac{22}{3}$$

$\Rightarrow k=7\left(k\in\mathbb{N},k\in[0,10]\right)$

Vậy max $a_k=a_7=\frac{2^7}{3^{10}}C_{10}^7$

➤ *BÀI TẬP TƯƠNG TỰ*

Bài 1. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển nhị thức Niu-tơn: $\left(2x+\frac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)^{18}$ $(x>0)$.

Bài 2: (ĐH HCQG, 2000)

a)Tìm hệ số x^8 trong khai triển $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{12}$

Bài 3: Tìm số hạng thứ 21 trong khai triển: $(2-3x)^{25}$

Bài 4: (Đại học Thuỷ lợi cơ sở II, 2000)
Khai triển và rút gọn đa thức:
$Q(x)=(1+x)^9+(1+x)^{10}+\ldots+(1+x)^{14}$
Ta được đa thức:
$$Q(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_{14}x^{14}$$
Xác định hệ số a_9 *ĐS:* $a_9=3003$

Bài 5. Tìm hệ số của x^5 trong khai triển biểu thức $P=x(1-2x)^5+x^2(1+3x)^{10}$

Bài 6. Tìm hệ số của x^8 trong khai triển thành đa thức của biểu thức $P=\left[1+x^2(1-x)\right]^8$

Bài 7. Tìm các số hạng không chứa x trong khai triển nhị thức Niu-tơn $P=\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^7$, $x>0$

Bài 8. Tìm hệ số của số hạng chứa x^8 trong khai triển nhị thức Niu-tơn $\left(\frac{1}{x^3}+\sqrt{x^5}\right)^n$, biết rằng
$$C_{n+4}^{n+1}-C_{n+3}^{n}=7(n+3)$$

Bài 9. Biết rằng tổng tất cả các hệ số của khai triển nhị thức $(x^2+1)^n$ bằng 1024. Hãy tìm hệ số của số hạng chứa x^{12} trong khai triển trên.

Bài 10. Gọi $a_1, a_2, \ldots, a_{11}$ là hệ số trong khai triển:
$(x+1)^{10}(x+2)=x^{11}+a_1x^{10}+a_2x^9+\ldots+a_{10}x+a_{11}$
Tìm hệ số a_5.

Bài 11. Với n là số nguyên dương, gọi a_{3n-3} là hệ số của x^{3n-3} trong khai triển thành đa thức của $(x^2+1)^n(x+2)^n$. Tìm n để $a_{3n-3}=26n$.

Bài 12. HVKTQS, 2000) Khai triển đa thức:
$P(x)=(1+2x)^{12}=a_0+a_1x+\ldots+a_{12}x^{12}$
Tìm $\max(a_0,a_1,a_2,\ldots,a_{12})$

HD: Gọi a_k là hệ số lớn nhất của khai triển suy ra: $a_k>a_{k-1}$. Từ đây ta có hệ phương trình

Bài 13. Khai triển $(3x+2)^9=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_9x^9$
Tìm $\max\{a_0,a_1,a_2,\ldots,a_9\}$

✪ *Dạng 7:* Áp dụng nhị thứ Newton để chứng minh hệ thức và tính tổng tổ hợp.

- ❖ $a^kC_n^k$ liên quan đến $(1+a)^n$
- ❖ $C_n^k.C_m^i$ liên quan đến so sánh hệ số của $(1+x)^n.(1+x)^m=(1+x)^{n+m}$
- ❖ $k.C_n^k$ liên quan đến đạo hàm của$(1+x)^n$
- ❖ $\frac{1}{k+1}C_n^k$ liên quan đến tích phân của$(1+x)^n$

1. Thuần nhị thức Newton

Dấu hiệu nhận biết: Khi các số hạng của tổng đó có dạng $C_n^ka^{n-k}b^k$ thì ta sẽ dùng trực tiếp nhị thức Newton: $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^ka^{n-k}b^k$. Việc còn lại chỉ là khéo léo chọn a,b.

Phương pháp: Từ đề bài, ta liên kết với một nhị thức khai triển và cho x giá trị thích hợp, từ đó suy ra kết quả.

Ví dụ 1: Tính tổng: $S_1=C_n^0+C_n^1+C_n^2+\ldots+C_n^n$;
$S_2=C_n^0-C_n^1+C_n^2-\ldots+(-1)^kC_n^k+\ldots+(-1)^nC_n^n$

Giải

Chọn x = 1 ta có:
$(1+1)^n=C_n^0+C_n^1+C_n^2+\ldots+C_n^n\Rightarrow S_1=2^n$
Chọn x = – 1 ta có:
$(1-1)^n=C_n^0-C_n^1+C_n^2-\ldots+(-1)^kC_n^k+\ldots+(-1)^nC_n^n$
$\Rightarrow S_2=0$

Ví dụ 2: Tính tổng: $S_3=C_{2n}^0+C_{2n}^2+C_{2n}^4+\ldots+C_{2n}^{2n}$;
$S_4=C_{2n}^1+C_{2n}^3+\ldots+C_{2n}^{2n-1}$

Giải

Ta có:
$(1+x)^{2n}=C_{2n}^0+C_{2n}^1+C_{2n}^2+C_{2n}^3+\ldots+C_{2n}^{2n-1}+C_{2n}^{2n}$
$x=1\Rightarrow 2^{2n}=C_{2n}^0+C_{2n}^1+C_{2n}^2+C_{2n}^3+C_{2n}^4+\ldots+C_{2n}^{2n-1}+C_{2n}^{2n}$
$x=-1\Rightarrow 0=C_{2n}^0-C_{2n}^1+C_{2n}^2-C_{2n}^3+C_{2n}^4-\ldots-C_{2n}^{2n-1}+C_{2n}^{2n}$

$\Rightarrow 2^{2n}=2\left(C_{2n}^0+C_{2n}^2+C_{2n}^4+\ldots+C_{2n}^{2n}\right)$ Lại

$\Leftrightarrow S_3=C_{2n}^0+C_{2n}^2+C_{2n}^4+..+C_{2n}^{2n}=2^{2n-1}$

có:
$$\left.\begin{array}{l}x=1\Rightarrow 2^{2n}=C_{2n}^0+C_{2n}^1+C_{2n}^2+C_{2n}^3+C_{2n}^4+\ldots+C_{2n}^{2n-1}+C_{2n}^{2n}\\ x=-1\Rightarrow 0=C_{2n}^0-C_{2n}^1+C_{2n}^2-C_{2n}^3+C_{2n}^4-\ldots-C_{2n}^{2n-1}+C_{2n}^{2n}\end{array}\right\}$$

$2^{2n}=2\left(C_{2n}^1+C_{2n}^3+C_{2n}^5+\ldots+C_{2n}^{2n-1}\right)$
$\Leftrightarrow S_4=C_{2n}^1+C_{2n}^3+..+C_{2n}^{2n-1}=2^{2n-1}$

Ví dụ 3: Tính tổng:
$T=C_n^0-2C_n^1+2^2C_n^2-2^3C_n^3+\ldots+(-2)^nC_n^n$

Giải

Ta có: $(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\ldots+C_n^kx^k+\ldots+C_n^nx^n$
Chọn x = –2 được:
$(1-2)^n=C_n^0-2C_n^1+2^2C_n^2-2^3C_n^3+\ldots+(-2)^nC_n^n\Rightarrow T=(-1)^n$

Ví dụ 4: Tính tổng $3^{16}C_{16}^0-3^{15}C_{16}^1+3^{14}C_{16}^2-\ldots+C_{16}^{16}$

Giải:

Dễ dàng thấy tổng trên có dạng như dấu hiệu nêu trên. Ta sẽ chọn a=3, b=-1.
Khi đó tổng trên sẽ bằng $(3-1)^{16}=2^{16}$

Ví dụ 5: (ĐH Hàng Hải-2000) Chứng minh:
$C_{2n}^0+3^2C_{2n}^2+3^4C_{2n}^4+...+3^{2n}C_{2n}^{2n}=2^{2n-1}\left(2^{2n}+1\right)$

Giải:

$(1+x)^{2n}=C_{2n}^0+C_{2n}^1x+C_{2n}^2x^2+...+C_{2n}^{2n-1}x^{2n-1}+C_{2n}^{2n}x^{2n}\ (1)$ L

$(1-x)^{2n}=C_{2n}^0-C_{2n}^1x+C_{2n}^2x^2+...-C_{2n}^{2n-1}x^{2n-1}+C_{2n}^{2n}x^{2n}\ (2)$

ấy (1) + (2) ta được:

$(1+x)^{2n}+(1-x)^{2n}=2\left[C_{2n}^0+C_{2n}^2x^2+...+C_{2n}^{2n}x^{2n}\right]$

Chọn x = 3 suy ra: …..

➢ BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Bài 1: Tính các tổng sau:

$S=C_{11}^6+C_{11}^7+C_{11}^8+C_{11}^9+C_{11}^{10}+C_{11}^{11}$

Bài 2: Tìm hệ số của x^{10} trong khai triển nhị thức $(2+x)^n$, biết rằng

$3^nC_n^0-3^{n-1}C_n^1+3^{n-2}C_n^2-3^{n-3}C_n^3+...+(-1)^nC_n^n=2048$

Bài 3: Tìm hệ số của số hạng chứa x^{26} trong khai triển nhị thức Niu-tơn của $\left(\frac{1}{x^4}+x^7\right)^n$, biết rằng

$C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^2+...+C_{2n+1}^n=2^{20}-1$

Bài 4: Tìm số nguyên dương n sao cho

$C_n^0+2C_n^1+2^2C_n^2+2^3C_n^3+...+2^nC_n^n=243$

Bài 5: Cho khai triển: $(1+2x)^n=a_0+a_1x+...+a_nx^n$,trong đó $n\in\mathbb{N}^*$ và các hệ số $a_0,a_1,...,a_n$ thỏa mãn hệ thức $a_0+\frac{a_1}{2}+...+\frac{a_n}{2^n}=4096$. Tìm số lớn nhất trong các số $a_0,a_1,...,a_n$.

Bài 6: Chứng minh

a) $C_m^0C_n^k+C_m^1C_n^{k-1}+...+C_m^mC_n^{k-m}=C_{n+m}^k$.

b) $\left(C_n^0\right)^2+\left(C_n^1\right)^2+...+\left(C_n^n\right)^2=C_{2n}^n$

HD: a)So sánh hệ số của x^k ở hai vế đẳng thức:
$(1+x)^n.(1+x)^m$ và $(1+x)^{n+m}$

b) So sánh hệ số của x^n ở hai vế đẳng thức:
$(1+x)^n.(1+x)^n$ và $(1+x)^{2n}$

2.Sử dụng đạo hàm cấp 1,2.

a.Đạo hàm cấp 1.

Dấu hiệu: *Khi hệ số đứng trước tổ hợp tăng dần hoặc giảm dần từ 1,2,3,…,n hay n,…,3,2,1 tức là số hạng đó có dạng* kC_n^k *hoặc* $kC_n^ka^{n-k}b^{k-1}$ *thì ta có thể dùng đạo hàm cấp 1 để tính. Cụ thể:*

$(a+x)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}x+...+C_n^nax^n$

Lấy đạo hàm hai vế theo x ta được:

$n(a+x)^{n-1}=C_n^1a^{n-1}+2C_n^2a^{n-2}x+...+nC_n^nax^{n-1}\ (1)$ *Đến đây thay x,a bằng hằng số thích hợp ta được tổng cần tìm.*

Ví dụ 1:(ĐH BKHN-1999) Tính tổng
$C_n^1-2C_n^2+3C_n^3-4C_n^4+...+(-1)^{n-1}nC_n^n$

Giải:

Ta thấy tổng cần tính có dạng như VP(1). Việc còn lại chỉ cần chọn a=1,x=-1 ta tính được tổng bằng 0.

Cách khác: Sử dụng đẳng thức $kC_n^k=nC_{n-1}^{k-1}$ ta tính được tổng bằng:

$nC_{n-1}^0-nC_{n-1}^1+nC_{n-1}^2+...+(-1)^{n-1}nC_{n-1}^{n-1}$

$=n(1-1)^{n-1}=0$

Ví dụ 2:Tính tổng: $2008C_{2007}^0+2007C_{2007}^1+...+C_{2007}^{2007}$

Giải:

Hệ số trước tổ hợp giảm dần từ 2008,2007,…,1 nên dùng đạo hàm là điều dễ hiểu:

$(x+1)^{2007}=C_{2007}^0x^{2007}+C_{2007}^1x^{2006}+...+C_{2007}^{2007}$

Bây giờ nếu đạo lấy đạo hàm thì chỉ được $2007C_{2007}^0x^{2006}$ trong khi đó đề đến 2008 do đó ta phải nhân thêm với x vào đẳng thức trên rồi mới dùng đạo hàm:

$x(x+1)^{2007}=C_{2007}^0x^{2008}+C_{2007}^1x^{2007}+...+C_{2007}^{2007}x$

$\Rightarrow(x+1)^{2006}(2008x+1)$

$=2008C_{2007}^0x^{2007}+2007C_{2007}^1x^{2006}+...+C_{2007}^{2007}$

Thay x = 1 vào ta tìm được tổng là 2009.2^{2006}

b.Đạo hàm cấp 2.

Dấu hiệu: *Khi hệ số đứng trước tổ hợp có dạng 1.2,2.3,…,(n-1)n hay (n-1)n,…,3.2,2.1 hay* $1^2,2^2,...,n^2$ *(không kể dấu) tức có dạng* $k(k-1)C_n^ka^{n-k}$ *hay tổng quát hơn* $k(k-1)C_n^ka^{n-k}b^k$ *thì ta có thể dùng đạo hàm đến cấp 2 để tính. Xét đa thức*

$(a+bx)^n=C_n^0+C_n^1a^{n-1}bx+...+C_n^nb^nx^n$

Khi đó đạo hàm hai vế theo x ta được:

$bn(a+bx)^{n-1}=C_n^1a^{n-1}b+2C_n^2a^{n-2}b^2x...+nC_n^nb^nx^{n-1}$

Đạo hàm lần nữa:

$b^2n(n-1)(a+bx)^{n-2}$

$=2.1C_n^2a^{n-2}b^2+...+n(n-1)C_n^nb^nx^{n-2}\ (2)$

Đến đây ta gần như giải quyết xong ví dụ toán chỉ việc thay a,b,x bởi các hằng số thích hợp nữa thôi.

Ví dụ 3: (ĐH AN-CS Khối A 1998)

Cho $f(x)=(1+x)^n,(2\le n\le\mathbb{Z})$

a.Tính $f''(1)$

b.Chứng minh rằng:

$2.1C_n^2+3.2C_n^3+...+(n-1)nC_n^n=n(n-1)2^{n-2}$

Giải:

a. $f''(x)=n(1+x)^{n-1}$

$\Rightarrow f''(x)=n(n-1)(1+x)^{n-2}\Rightarrow f''(1)=n(n-1)2^{n-2}$

b. Ta có

$f(x)=(1+x)^n=\sum_{k=1}^{n}C_n^kx^k=C_n^0+C_n^1x+\sum_{k=2}^{n}C_n^kx^k$

$f'(x)=C_n^1+\sum_{k=2}^{n}kC_n^kx^{k-1}$

$$f''(x)=\sum_{k=2}^{n}k(k-1)C_n^k x^{k-2}$$

$$\Rightarrow f''(1)=\sum_{k=1}^{n}k(k-1)C_n^k=n(n-1)2^{n-2}$$

$$\Rightarrow 2.1C_n^1+3.2C_n^2+...+(p+1)C_n^p+...+(n+1)nC_n^n$$
$$=n(n-1)2^{n-2}\,(ĐPCM)$$

Ví dụ 4: Chứng minh rằng:

$$2.1C_n^1+3.2C_n^2+...+(n+1)pC_n^p+...+(n+1)nC_n^n=n(n+1)2^{n-2}$$

Với bài toán này ta giải như sau:

Xét nhị thức: $(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+...+C_n^nx^n$

Nhân 2 vế của đẳng thức với $x\neq 0$ đồng thời lấy đạo hàm cấp 2 hai vế theo biến x ta được :

$$2n(1+x)^{n-1}+n(n-1)x(1+x)^{n-2}$$
$$=2C_n^1x+3.2C_n^2x+...+(n+1)nC_n^nx^{n-1}$$

Cho x=2 ta được ĐPCM

➢ BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Bài 1:(CĐSP Bến Tre Khối A-2002) Chứng minh rằng: $C_{20}^1+C_{20}^1+...+C_{20}^{19}=2^{19}$

Bài 2:(CĐ Khối T-M-2004)Chứng minh rằng :

$$C_{2004}^0+2^2C_{2004}^1+...+2^{2004}C_{2004}^{2004}=\frac{3^{2004}+1}{2}$$

Bài 3:(ĐHKTQD-2000) Chứng minh:

$$(2+x)^n=1.2^{n-1}.C_n^1+2.2^{n-2}.C_n^2+...+nC_n^n$$
$$=n.3^{n-1}\,(\forall 1\le n\in\mathbb{Z})$$

Bài 4: Rút gọn tổng:

$$1^2C_{2009}^1 2^{2008}+2^2C_{2009}^2 2^{2007}+...+2009^2C_{2009}^{2009}$$

Bài 5: Với n là số nguyên dương, chứng minh rằng:

a) $C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+...+(n-1)C_n^{n-1}+nC_n^n=n.2^{n-1}$

b) $2.1.C_n^2+3.2.C_n^3+...+(n-1)nC_n^n=n.(n-1).2^{n-2}$

c) $C_n^2+2C_n^3+3C_n^4+...+(n-1)C_n^n=(n-2)2^{n-1}+1$

d) $C^1_n+2\,C^2_n+\ldots+(n-1)\,C^{n-1}_n+n\,C^n_n=n.2^{n-1}$

e) $2.1\,C^2_n+3.2\,C^3_n+\ldots+n\,(n-1)C^n_n=n(n-1)2^{n-2}$

3.Sử dụng tích phân

Dấu hiệu: *Khi biểu thức có dạng* $\frac{1}{k+1}C_n^k$*, hoặc* $\frac{1}{(k+1)(k+2)}C_n^k$ *thì ta sẽ lấy tích phân hai vế, sau đó khéo léo chọn a, b sao cho phù hợp.*

Ví dụ 1(TSA- 2007) Chứng minh

$$\frac{1}{2}C_{2n}^1+\frac{1}{4}C_{2n}^3+\frac{1}{6}C_{2n}^5+...+\frac{1}{2^n}C_{2n}^{2n-1}=\frac{2^{2n}-1}{2n+1}.$$

Giải:

Ta có : .....

$$(1+x)^{2n}-(1-x)^{2n}=2(C_{2n}^1x+C_{2n}^3x^3+C_{2n}^5x^5+....+C_{2n}^{2n-1}x^{2n-1})$$

$$\int_0^1\frac{(1+x)^{2n}-(1-x)^{2n}}{2}dx=\int_0^1(C_{2n}^1x+C_{2n}^3x^3+....+C_{2n}^{2n-1}x^{2n-1})dx$$

$\Leftrightarrow$ ....

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}C_{2n}^1+\frac{1}{4}C_{2n}^3+\frac{1}{6}C_{2n}^5+...+\frac{1}{2^n}C_{2n}^{2n-1}=\frac{2^{2n}-1}{2n+1}.$$

➢ BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Bài 1: Cho n là số nguyên dương, chứng minh

$$\frac{1}{2}C_{2n}^1+\frac{1}{4}C_{2n}^3+\frac{1}{6}C_{2n}^5+...+\frac{1}{2n}C_{2n}^{2n-1}=\frac{2^{2n}-1}{2n+1}$$

Bài 2: Cho n là số nguyên dương, chứng minh:

1) $1+\frac{1}{2}C_n^1+\frac{1}{3}C_n^3+...+\frac{1}{n+1}C_n^n=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$

2) $2C_n^0-2^2\frac{1}{2}C_n^1+2^3\frac{1}{3}C_n^2+...+\frac{(-1)^n}{n+1}2^{n+1}C_n^n=\frac{1}{n+1}\left[1+(-1)^n\right]$

Bài 3: 1. Tính tích phân $I=\int_0^1 x(1-x^2)^n\,dx$

2. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{2}C_n^0-\frac{1}{4}C_n^1+\frac{1}{6}C_n^2-\frac{1}{8}C_n^3+...+\frac{(-1)^n}{2n+2}C_n^n=\frac{1}{2n+2}$$

Bài 4: Cho n là số nguyên dương. Tính tổng

$$C_n^0+\frac{2^2-1}{2}C_n^1+\frac{2^3-1}{3}C_n^2+...+\frac{2^n-1}{2}C_n^n$$

Bài 5:

1. Tính tích phân $I=\int_0^1 x^2(1+x^3)^n\,dx$

2. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{3}C_n^0+\frac{1}{6}C_n^1+\frac{1}{9}C_n^2+...+\frac{1}{3n+3}C_n^n=\frac{2^{n+1}-1}{3n+3}$$

3. Tính tổng sau:

$$S=\frac{1}{1}.C_n^0+\frac{1}{2}.C_n^1+\frac{1}{3}C_n^2+\frac{1}{4}C_n^3+...+\frac{1}{n+1}C_n^n$$

Phần 2: XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

I. Phép Thử Và Biến Cố

1.Phép thử ngẫu nhiên: là phép thử mà ta không đoán trước được kiết quả của nó,mặc dù biết được tập hợp tất cả kết quả có thể có của phép thử đó.

2. Không gian mẫu: Là tập hợp các kết quả có thể sảy ra của một phép thử .

3.Biến cố: là tập con của không gian mẫu.

+ Tập Ø là biến cố không thể.(biến cố không)

+ Tập Ω còn gọi là biến cố chắc chắn.

4. Phép toán trên các biến cố.

- *Biến cố đối:* $\overline{A} = \Omega \setminus A$
- *Biến cố hợp*: $C = A \cup B$
- *Biến cố giao:* $C = A \cap B$
- *Biến cố xung khắc:* Nếu $A \cap B = \emptyset$ thì ta nói A và B xung khắc .
- Hai biến cố A và B được gọi là *độc lập* với nhau nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không làm ảnh hưởng tới xác suất của xảy ra của biến cố kia.

II. Phương Pháp Tính Xác Suất.

Cách 1: Sử dụng định nghĩa

Định nghĩa: *Giả sử A là biến cố liên quan đến một phép thử chỉ có một số hữu hạn kết quả đồng khả năng xuất hiện. Ta gọi tỷ số* $\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}$ *là xác suất của biến cố A, kí hiệu là P(A).* $\left(P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)}\right)$

Chú ý: *n(A) là số phần tử của A hay cũng là số các kết quả thuận lợi cho biến cố A, còn n(Ω) là số các kết quả có thể xảy ra của một phép thử.*

Ví dụ 1: Gieo ngẫu nhiên một đồng tiền cân đối và đồng chất làm hai lần. Tính xác suất của các biến cố:
a./ A: "Mặt sấp xuất hiện hai lần" ;
b./ B: " mặt sấp xuất hiện đúng một lần".
c./ C: "Mặt sấp xuất hiện ít nhất một lần".

Giải:

Không gian mẫu $\Omega = \{SS, SN, NS, NN\}$ .n(Ω) = 4

Vì đồng tiền cân đối đồng chất và việc gieo là ngẫu nhiên nên các kết quả đồng chất xuất hiện.

Ta có:

a./ A = $\{SS\}$, n(A) = 1, ta có:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1}{4}.$$

b./ B = $\{SN, NS\}$, n(B) = 2, ta có:

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

c./ C = $\{SS, SN, NS\}$, n(C) = 2, ta có:

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{3}{4}.$$

Ví dụ 2: Xếp ngẫu nhiên ba bạn nam và ba bạn nữ ngồi vào sáu ghế kê theo hàng ngang. Tìm xác suất:
a) Nam nữ ngồi xen kẽ nhau.
b) Ba bạn nam ngồi cạnh nhau.
(Bài 6 – trang 76 sách Đại số và giải tích 11)

Giải:

Không gian mẫu Ω là số cách sắp xếp 6 học sinh vào sáu vị trí $n(\Omega) = 6! = 720$

a) Gọi A là biến cố "Xếp 3 học sinh nam và 3 học sinh nữ vào 6 ghế kê theo hàng ngang mà nam và nữ xen kẽ nhau"

Khi đó có 2 cách sắp xếp vị trí:

Hiểu $\left\{\begin{array}{l}\text{Nam-nữ--nam-nữ-- nam-nữ}\\ \text{Nữ-nam-nữ- nam-nữ- nam}\end{array}\right.$

Trong mỗi trường hợp có 3 cách sắp xếp 3 bạn nam vào 3 vị trí và 3 bạn nữ vào 3 vị trí còn lại nên

$$n(A) = 3!.3! + 3!.3! = 72$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{72}{720} = \frac{1}{10}$$

a) Gọi B là biến cố "Xếp 3 học sinh nam và 3 học sinh nữ vào 6 ghế kê theo hàng ngang mà 3 bạn nam ngồi cạnh nhau"

+) Xem 3 nam ngồi cạnh nhau là một nhóm, như vậy có 4 cách sắp xếp vị trí tương ứng với 4 vị trí cho nhóm nam

Hiểu $\left\{\begin{array}{l}\text{(nam,nam,nam)-- nữ --nữ --nữ}\\ \text{nữ --(nam,nam,nam)-- nữ --nữ}\\ \text{nữ -- nữ --(nam,nam,nam)--nữ}\\ \text{nữ -- nữ -- nữ --(nam,nam,nam)}\end{array}\right.$

Trong mỗi trường hợp có 3 cách sắp xếp 3 bạn nam vào 3 vị trí và 3 bạn nữ vào 3 vị trí còn lại nên

$$n(B) = 4.3!.3! = 144$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{144}{720} = \frac{1}{5}$$

Chú ý*: Ta có thể mở rộng cho một lớp học có nhiều học sinh khi xếp hàng chào cờ..(Các em nên tự giả định các trường hợp và tự giải)*

Ví dụ 3: Gieo một con súc xắc, cân đối và đồng nhất. Giả sử con súc xắc suất hiện mặt b chấm. Xét phương trình $x^2 + bx + 2$ Tính xác suất sao cho phương trình có nghiệm. *(Bài 4 trang 74 sách Đại số và giải tích 11)*

Giải:

Ký hiệu "con súc xắc suất hiện mặt b chấm" là b:

Không gian mẫu $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \Rightarrow n(\Omega) = 6$

Gọi A l à biến cố: "Phương trình có nghiệm"

Ta đã biết phương trình $x^2 + bx + 2$ có nghiệm khi $\Delta = b^2 - 8 \geq 0 \Leftrightarrow b \in (-\infty; -2\sqrt{2}) \cup (-2\sqrt{2}; +\infty)$

Mà $b \in \{1,2,3,4,5,6\} \Rightarrow A = \{3,4,5,6\} \Rightarrow n(A) = 4$

Do đó $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$

Ví dụ 4: Trên một cái vòng hình tròn dùng để quay số số có gắn 36 con số từ 01 đến 36(Xác suất để bánh xe sau khi quay dừng ở mỗi số đều như nhau) Tính xác suất để khi quay hai lần liên tiếp bánh xe dừng lại ở giữa số 1 và số 6 (kể cả 1 và 6) trong lần quay đầu và dừng lại ở giữa số 13 và 36 (kể cả 13 và 36) trong lần quay thứ 2.

Giải:

Gọi A là biến cố cần tính xác suất

$\Omega = \{(i,j) \mid i,j \in \{1,2,...,36\}\} \Rightarrow n(\Omega) = 36.36 = 1296$

$A = \{(i,j) \mid i \in \{1,2,...,6\}, j \in \{13,14,...,36\}\}$

Có 6 cách chọn i, ứng với mỗi cách chọn i có 24 cách chọn j (từ13 đến36 có 25 số) do đó theo quy tắc nhân $\Rightarrow n(\Omega) = 6.24 = 144$

$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{144}{1296} = \frac{1}{9}$

Ví dụ 5: Gieo một đồng tiền cân đối đồng chất liên tiếp cho đến khi lần đầu tiên xuất hiện mặt ngửa hoặc cả 6 lần xuất hiện mặt sấp thì dừng lại.
a) Mô tả không gian mẫu.
b) Tính xác suất:
A: "Số lần gieo không vượt quá ba"
B: "Số lần gieo là năm"; C: "Số lần gieo là sáu"

Giải:

a) Không gian mẫu

$\Omega = \{N, SN.SSN, SSSN, SSSSN, SSSSSS, SSSSSN\}$

b) Ta có: $n(\Omega) = 7$

$A = \{N, SN, SSN\} \Rightarrow n(A) = 3 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{3}{7}$

$B = \{SSSN\} \Rightarrow n(A) = 1 \Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{1}{7}$

$C = \{SSSSSN, SSSSSS\} \Rightarrow n(C) = 2 \Rightarrow P(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{2}{7}$

Ví dụ 6: **(ĐH:A-2013)**
Gọi S là tập hợp tất cả số tự nhiên gồm ba chữ số phân biệt được chọn từ các số 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7. Xác định số phần tử của S. Chọn ngẫu nhiên một số từ S, tính xác suất để số được chọn là số chẵn

Giải:

Gọi số tự nhiên gồm 3 chữ số phân biệt là $\overline{abc}$, khi đó:
- Chọn a có 7 cách
- Chọn b có 6 cách
- Chọn c có 5 cách

$\Rightarrow$ Số phần tử của S là 7.6.5 = 210 phần tử

Gọi số tự nhiên chẵn gồm 3 chữ số phân biệt là $\overline{a_1b_1c_1}$, khi đó:
- Chọn c_1 chẵn có 3 cách
- Chọn a_1 có 6 cách
- Chọn b_1 có 5 cách

$\Rightarrow$ Số cách chọn để được số tự nhiên chẵn có 3 chữ số phân biệt là 3.6.5 = 90 cách

Vậy xác suất cần tìm là $P = \frac{90}{210} = \frac{3}{7}$.

Cách 2: Sử dụng biến cố đối

✪ *Với mọi biến cố A thì $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.*

Ví dụ 1: Cho một lục giác đều ABCDEF. Viết các chữ cái A, B, C, D, E, F vao 6 thẻ. Lấy ngẫu nhiên hai thẻ. Tìm xác suất sao cho đoạn thẳng mà các đầu mút là các điểm được ghi trên 2 thẻ đó là:
a) Cạnh của lục giác.
b) Đường chéo của lục giác.
c) Đường chéo nối 2 đỉnh đối diện của lục giác.
(Bài 8 – trang 77 sách Đại số và giải tích 11)

Giải:

Chúng ta đã biết từ 6 điểm phân biệt sao cho không có 3 điểm nào thẳng hàng có thể tạo ra được $C_6^2 = 15$ đoạn thẳng n(Ω) = 15.Gọi:

A là biến cố "Đoạn thẳng mà các đầu mút là các điểm được ghi trên hai thẻ là cạnh của lục giác"

B là biến cố "Đoạn thẳng mà các đầu mút là các điểm được ghi trên hai thẻ là đường chéo của lục giác"

C là biến cố "Đoạn thẳng mà các đầu mút là các điểm được ghi trên hai thẻ là đường chéo nối hai đỉnh đối diện của lục giác"

$n(A) = 6 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$.

Có $B = \overline{A} \Rightarrow P(B) = 1 - P(A) = \frac{3}{5}$

$n(C) = 3 \Rightarrow P(A) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$.

Ví dụ 2: Gieo đồng tiền xu cân đối đồng chất 3 lần. Tính xác suất của các biến cố:
a) Biến cố A: "Trong 3 lần gieo có ít nhất một lần xuất hiện mặt ngửa".
b) Biến cố B: "Trong 3 lần gieo có cả hai mặt sấp, ngửa".

Giải:

a) Không gian mẫu là 3 lần gieo, mỗi lần có 2 khả năng $n(\Omega) = 2.2.2 = 8$

$\Rightarrow$Biến cố $\overline{A}$ "Không có lần nào xuất hiện mặt ngửa"

$\Rightarrow \overline{A} = \{SSS\} \Rightarrow n(\overline{A}) = 1 \Rightarrow P(\overline{A}) = \frac{1}{8}$

$\Rightarrow P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 7/8$

b) Tương tự ta có:

$\overline{B} = \{SSS, NNN\} \Rightarrow n(\overline{B}) = 2 \Rightarrow P(\overline{B}) = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 3/4$

Ví dụ 3: Gieo ngẫu nhiên một con súc sắc cân đối đồng chất hai lần. Tính xác suất của các biến cố sau:
a) Biến cố A: "Trong hai lần gieo ít nhất một lần xuất hiện mặt một chấm"
b) Biến cố B: "Trong hai lần gieo tổng số chấm trong hai lần gieo là một số nhỏ hơn 11"

Giải:

Không gian mẫu

$\Omega = \{(i,j) \mid i,j \in \{1,2,...,6\}\} \Rightarrow n(\Omega) = 6.6 = 36$

a) Ta có biến cố đối

$\overline{A} = \{(i,j) \mid i,j \in \{2,2,...,6\}\} \Rightarrow n(\overline{A}) = 5.5 = 25$

$$\Rightarrow P(\overline{A}) = \frac{n(\overline{A})}{n(\Omega)} = \frac{25}{36} \Rightarrow P(A) = 1 - P(\overline{A}) = \frac{11}{36}$$

b) Ta có: $\overline{B} = \{(i,j) \mid i, j \in \{1,2,...,6\} \mid i + j \ \geq 11\}$

$\overline{B} = \{(5,6),(6,5),(6,6)\} \Rightarrow n(\overline{B}) = 3$

$$\Rightarrow P(\overline{B}) = \frac{n(\overline{B})}{n(\Omega)} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} \Rightarrow P(B) = 1 - P(\overline{B}) = \frac{11}{12}$$

Cách 3: Sử dụng công thức cộng và nhân xác suất.

1./ Định lý: *Giả sử A và B là các biến cố liên quan đến một phép thử có một số chẵn hữu hạn kết quả đồng khả năng xuất hiện. Khi đó ta có định lý sau đây:*

a) $P(\phi) = 0$, $P(\Omega) = 1$.

b) $0 \leq P(A) \leq 1$, với mọi biến cố A.

c) Nếu A và B xung khắc,thì $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. (công thức cộng xác suất).

d) Với A và B bất kì $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

2. Các biến cố độc lập, công thức nhân xác suất.

A và B là hai biến cố độc lập khi và chỉ khi:

$$P(A \cap B) = P(A.B) = P(A).P(B).$$

Chú ý: *A và B độc lập thì $A \& \overline{B}$; $\overline{A} \& B$; $\overline{A} \& \overline{B}$ cũng độc lập.*

Ví dụ 1: Một hộp đựng 5 viên bi đỏ, 6 viên bi trắng và 7 viên bi vàng. Người ta chọn ra 4 viên bi từ hộp đó. Tính xác suất để số bi lấy ra không có đủ cả ba màu?

Giải:

* Không gian mẫu là tập hợp mà mỗi phần tử là chỉnh hợp chập 3 của 18 viên bi : $n(\Omega) = C_{18}^4 = 3060$

* Gọi biến cố A:" Cả 4 bi lấy ra đều có đủ 3 màu "

Xét 3 khả năng:

+) 2 viên đỏ,1 viên trắng và 1 viên vàng :

Có $C_5^2 C_6^1 C_7^1 = 10.6.7 = 420$ cách

+) 1viên đỏ,2 viên trắng và 1 viên vàng :

Có $C_5^1 C_6^2 C_7^1 = 5.15.7 = 525$ cách

+) 1viên đỏ,1 viên trắng và 2 viên vàng :

Có $C_5^1 C_6^1 C_7^2 = 5.6.21 = 630$ cách

Vậy theo quy tắc cộng ta có:

$$n(A) = C_5^2 C_6^1 C_7^1 + C_5^1 C_6^2 C_7^1 + C_5^1 C_6^1 C_7^2 = 1575$$

*Gọi biến cố B:" số bi lấy ra không có đủ cả ba màu"

CÁCH 1: Số cách chọn thoả mãn yêu cầu là:

$$n(B) = C_{18}^4 - (C_5^2 C_6^1 C_7^1 + C_5^1 C_6^2 C_7^1 + C_5^1 C_6^1 C_7^2) = 1485$$

Vậy $P(B) = \dfrac{n(B)}{n(\Omega)} = \dfrac{1485}{3060} = \dfrac{33}{68}$

CÁCH 2: Có $B = \overline{A} \Rightarrow P(B) = 1 - P(A) = 1 - \dfrac{n(A)}{n(\Omega)}$

CÁCH 3: Dùng công thức cộng xác suất tính P(A)

Xác suất lấy ra 2 viên đỏ,1 viên trắng và 1 viên vàng

$$P_1 = \frac{C_5^2 C_6^1 C_7^1}{C_{18}^4} = \frac{7}{51}$$

Xác suất lấy ra 1viên đỏ,2 viên trắng và 1 viên vàng :

$$P_2 = \frac{C_5^1 C_6^2 C_7^1}{C_{18}^4} = \frac{35}{204}$$

Xác suất lấy ra 1viên đỏ,1 viên trắng và 2 viên vàng :

$$P_3 = \frac{C_5^1 C_6^1 C_7^2}{C_{18}^4} = \frac{7}{34}$$

Xác suất lấy ra 4 viên đủ cả 3 màu là:

$$P_A = P_1 + P_2 + P_3 = \frac{35}{68}$$

Xác suất để số bi lấy ra không có đủ cả ba màu là

$$P(B) = 1 - P(A) = \frac{33}{68}$$

Ví dụ 2: Trong một lớp học gồm có 15 học sinh nam và 10 học sinh nữ. Giáo viên gọi ngẫu nhiên 4 học sinh lên bảng giải bài tập. Tính xác suất để 4 học sinh được gọi có cả nam và nữ.

Giải:

Số cách gọi 4 học sinh lên bảng là :

$$C_{25}^4 = \frac{25!}{4!.21!} = 12650$$

Số cách gọi 4 học sinh có cả nam lẫn nữ là :

TH 1: 1 nữ 3 nam có : $10.C_{15}^3 = 10.455 = 4550$

TH 2: 2 nữ 2 nam có : $C_{10}^2.C_{15}^2 = 4725$

TH 3 : 3 nữ 1 nam có : $C_{10}^3.C_{15}^1 = 1800$

Vậy số cách gọi 4 học sinh có nam và nữ là :

$$4550 + 4725 + 1800 = 11075$$

Vậy xác suất để 4 học sinh được gọi có cả nam lẫn nữ là :

$$\frac{11075}{12650} = \frac{443}{506}$$

Cách khác:

Xác suất chọn không có nam: $P_1 = \dfrac{C_{10}^4}{C_{25}^4} = \dfrac{21}{1265}$

Xác suất chọn không có nữ : $P_2 = \dfrac{C_{15}^4}{C_{25}^4} = \dfrac{273}{2530}$

Xác xuất có cả nam và nữ : $P = 1 - (P_1 + P_2) = \dfrac{443}{506}$

Ví dụ 3 (ĐH:B-2013) Có hai chiếc hộp chứa bi. Hộp thứ nhất chứa 4 viên bi đỏ và 3 viên bi trắng, hộp thứ hai chứa 2 viên bi đỏ và 4 viên bi trắng. Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp ra 1 viên bi, tính xác suất để 2 viên bi được lấy ra có cùng màu.

Giải:

Cách 2:(Công thức nhân xác suất)

Xác suất để 2 viên lấy ra cùng là bi đỏ: $\dfrac{4}{7}.\dfrac{2}{6} = \dfrac{4}{21}$

Xác suất để 2 viên lấy ra cùng là trắng: $\dfrac{3}{7}.\dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{7}$

Xác suất để 2 viên lấy ra cùng màu: $\dfrac{4}{21} + \dfrac{2}{7} = \dfrac{10}{21}$.

Vậy xác suất cần tìm là $10/21$

Cách 2(dùng định nghĩa):

• Không gian mẫu Ω là số cách chọn ra ra 2 viên bi, mỗi viên từ một hộp $n(\Omega) = 6.7 = 42$

• Số cách chọn ra ra 2 viên bi đỏ, mỗi viên từ một hộp là 4.2 = 8

• Số cách chọn ra ra 2 viên bi trắng, mỗi viên từ một hộp là 3.4 = 12

• Số cách chọn ra ra 2 viên bi cùng mầu, mỗi viên từ một hộp là: $n(A) = 12 + 8 = 20$

• Xác suất để 2 viên bi được lấy ra có cùng màu.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{20}{42} = \frac{10}{21}.$$

Ví dụ 4: Một cặp vợ chồng dự kiến sinh 3 con
a) Nếu họ muốn sinh 2 người con trai và 1 người con gái thì khả năng thực hiện mong muốn đó là bao nhiêu?
b) Tìm xác suất để trong 3 lần sinh họ có được cả trai và gái.

Giải

Mỗi lần sinh là một sự kiện hoàn toàn độc lập, và có 2 khả năng có thể xảy ra: hoặc đực hoặc cái với xác suất bằng nhau và = 1/2 do đó:
a) Khả năng thực hiện mong muốn
- Số khả năng xảy ra trong 3 lần sinh là $\mathbf{2^3}$
(3 lần sinh, mỗi lần có 2 khả năng)
- Số tổ hợp của 2 ♂ và 1 ♀ = $\mathbf{C_3^2}$ hoặc $\mathbf{C_3^1}$
(3 trường hợp con gái: trước-giữa-sau)
→ Khả năng để trong 3 lần sinh họ có được 2 trai và 1 gái $\frac{C_3^2}{2^3} = \frac{3}{8}$

b) Có 2 cách tính:

• Cách 1:
XS sinh 1 trai+ 2gái = $C_3^1/2^3$
XS sinh 2 trai+ 1gái = $C_3^2/2^3$
XS cần tìm = $C_3^1/2^3 + C_3^2/2^3 = 2(C_3^1/2^3) = 3/4$

• Cách 2:
XS sinh 3 trai = $(1/2)^3$
XS sinh 3 gái = $(1/2)^3$
Vậy XS cần tìm = $1-[(1/2)^3 + (1/2)^3] = 3/4$

Ví dụ 5: Có 5 quả trứng sắp nở. Những khả năng nào về giới tính có thể xảy ra? Tính xác suất mỗi trường hợp?

Giải:

• Cách 1:(trình bày theo một số tài liệu sinh)
Gọi a là xác suất nở ra con trống, b là xác suất nở ra con mái : ta có a = b = 1/2
- Số khả năng xảy ra trong 5 lần sinh là $\mathbf{2^5}$
5 lần nở là kết quả của

$$(a + b)^5 = C_5^0a^5 b^0 + C_5^1 a^4 b^1 + C_5^2 a^3 b^2 + C_5^3a^2 b^3 + C_5^4 a^1 b^4 + C_5^5 a^0 b^5$$
$$= a^5 + 5a^4 b^1 + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5a^1 b^4 + b^5$$

Vậy có 6 khả năng xảy ra với xác suất như sau :
-) 5 trống ($1.a^5$) là: $1/2^5 = 1/32$
-) 4 trống + 1 mái ($5a^4 b^1$) là: $5/2^5 = 5/32$
-) 3 trống + 2 mái ($10a^3 b^2$) là: $10/2^5 = 10/32$
-) 2 trống + 3 mái ($10a^3 b^2$) là: $10/2^5 = 10/32$
-) 1 trống + 4 mái ($5a^1 b^4$) là: $5/2^5 = 5/32$
-) 5 mái (b^5) là: $1/2^5 = 1/32$

(Mở rộng: k con trống và n lần sinh có $P = C_n^k / 2^n$)

Ví dụ 6: Gieo đồng thời hai con súc sắc. Tính xác suất:
a) Hai con súc sắc đều xuất hiện mặt chẵn.
b) Tích số chấm trên 2 con súc sắc là số chẵn.

Giải

C1: Sử dụng định nghĩa (theo nguyên lí đếm)

a) Ta có $n(\Omega) = 6.6 = 36$

Chọn A là biến cố "Hai con súc sắc đều xuất hiện mặt chẵn" .Do đó $A = \{(i, j) \mid i,j \in \{2,4,6\}\}$

Có 3 cách chọn $i \in \{2,4,6\}$, với mỗi cách chọn i ta có 3 cách chọn j.
Do đó có 9 cách chọn $(i, j) \in A \Rightarrow n(A) = 9$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{9}{36} = 1/4$$

b) Học sinh tự làm.

C2: Theo công thức nhân: Gọi
A là biến cố "Con súc sắc thứ nhất xuất hiện mặt chẵn"
B là biến cố "Con súc sắc thứ hai xuất hiện mặt chẵn"
X là biến cố "Hai con súc sắc đều xuất hiện mặt chẵn"
Thấy rằng A và B là hai biến cố độc lập và
$P(A) = P(B) = 3/6 = 1/2$ *(Trong 6 mặt thì có 3 mặt chẵn)*

Do vậy ta có: $P(X) = P(A).P(B) = 1/4$

b) Gọi Y là biến cố "Tích số chấm trên 2 con súc sắc là số chẵn" .Có 3 khả năng xảy ra để tích số chấm trên con súc sắc là số chẵn:

- Con súc sắc thứ nhất xuất hiện mặt chẵn, con súc sắc thứ hai xuất hiện mặt lẻ.
- Con súc sắc thứ nhất xuất hiện mặt lẻ, con súc sắc thứ hai xuất hiện mặt chẵn.
- Cả hai con súc sắc cùng xuất hiện mặt chẵn.

Và ta có $\overline{Y}$ "Tích số chấm trên 2 con súc sắc là số lẻ" chỉ có 1 khả năng là cả hai con súc sắc đều xuất hiện mặt lẻ.
Như vậy một lần nữa ta lại thấy ưu thế của biến cố đối.
Ta có $\overline{Y} = \overline{A}.\overline{B}$ và $\overline{A}, \overline{B}$ độc lập nên ta có:

$$P(\overline{Y}) = P(\overline{A}).P(\overline{B}) = [1 - P(A)].[1 - P(B)] = 1/4$$

Và do đó $P(Y) = 1 - P(\overline{Y}) = 3/4$

Ví dụ 7: Trong hòm có 10 chi tiết, trong đó có 2 chi tiết hỏng. Tìm xác suất để khi lấy ngẫu nhiên 6 chi tiết thì có không quá 1 chi tiết hỏng.

Giải:

C1: Sử dụng định nghĩa (theo nguyên lí đếm)
Học sinh tự làm.

C2:Công thức cộng và nhân xác suất
Gọi A_1 là biến cố "Trong 6 chi tiết lấy ra không có chi tiết nào hỏng"
A_2 là biến cố "trong 6 chi tiết lấy ra có 1 chi tiết hỏng"
A là biến cố "Trong 6 chi tiết lấy ra có không quá 1 chi tiết hỏng"
Khi đó $A = A_1 \cap A_2$. Do A_1 và A_2 xung khắc nhau nên
$P(A) = P(A_1) + P(A_2)$

Số cách lấy ra 6 chi tiết từ 10 chi tiết là $n(\Omega) = C_{10}^6 = 210$

Có 8 chi tiết không bị hỏng nên $n(A_1) = C_8^6 = 28$

Số cách lấy 5 chi tiết từ 8 chi tiết bị hỏng là C_8^5

Số cách lấy 1 chi tiết từ 2 chi tiết hỏng là C_2^1

Theo quy tắc nhân ta có $n(A_2) = C_8^5.C_2^1 = 112$

Do vậy ta có:

$P(A_1)=\frac{n(A_1)}{n(\Omega)}=\frac{28}{210}=\frac{2}{15}$

$P(A_2)=\frac{n(A_2)}{n(\Omega)}=\frac{112}{210}=\frac{8}{15}$

$P(A)=P(A_1)+P(A_2)=2/3$

Ví dụ 8: Có hai hộp cùng chứa các quả cầu. Hộp thứ nhất có 7 quả cầu đỏ, 5 quả cầu xanh. Hộp thứ hai có 6 quả cầu đỏ, 4 quả cầu xanh. Từ mỗi hộp lấy ra ngẫu nhiên 1 quả cầu.
a) Tính xác suất để 2 quả cầu lấy ra cùng màu đỏ.
b) Tính xác suất để 2 quả cầu lấy ra cùng màu.

Giải:

C1: Sử dụng định nghĩa (theo nguyên lí đếm)

Học sinh tự làm (chia các trường hợp).

C2:Công thức cộng và nhân xác suất

a) Gọi:
A là biến cố "Quả cầu lấy ra từ hộp thứ nhất màu đỏ"
B là biến cố "Quả cầu lấy ra từ hộp thứ hai màu đỏ"
X là biến cố "Hai quả cầu lấy ra cùng màu đỏ"
Ta có $X = AB, P(A)=7/12, P(B)=6/10=3/5$
Mặt khác A và B độc lập nên

$$P(X)=P(A).P(B)=\frac{7}{12}.\frac{3}{5}=\frac{7}{20}$$

b) Gọi:
Y là biến cố "Hai quả cầu lấy ra cùng màu xanh"
Z là biến cố "Hai quả cầu lấy ra cùng màu"
Ta có $Y=\overline{A}.\overline{B}$,Mặt khác $\overline{A}$ và $\overline{B}$ độc lập nên
$P(Y)=P(\overline{A}).P(\overline{B})=[1-P(A)].[1-P(B)]=...=1/6$
Thấy rằng $Z=X\cup Y, X\cap Y=\varnothing$ nên
$P(Z)=P(X)+P(Y)=....=31/60$

Ví dụ 9: Có 2 lô hàng. Người ta lấy ngẫu nhiên từ mỗi lô hàng một sản phẩm. Xác suất để được sản phẩm chất lượng tốt ở từng lô hàng lần lượt là 0,7; 0,8. Hãy tính xác suất để:
a) Trong 2 sản phẩm lấy ra có ít nhất một sản phẩm có chất lượng tốt.
b) Trong 2 sản phẩm lấy ra có đúng 1 sản phẩm có chất lượng tốt.

Giải:

Gọi A "Lấy được sản phẩm tốt từ lô hàng thứ nhất"
B "Lấy được sản phẩm tốt từ lô hàng thứ hai"
Khi đó ta có: $P(A)=0,7 \Rightarrow P(\overline{A})=1-0,7=0,3$

$$P(B)=0,8 \Rightarrow P(\overline{B})=1-0,8=0,2$$

a) Gọi X là biến cố "Trong 2 sản phẩm lấy ra có ít nhất một sản phẩm có chất lượng tốt".
Suy ra $\overline{X}=\overline{A}.\overline{B}$
Do ba biến cố $\overline{A}$ và $\overline{B}$ là độc lập nên ta có
$P(\overline{X})=P(\overline{A}).P(\overline{B})=0,06 \Rightarrow P(X)=1-P(\overline{X})=0,94$
b) Gọi Y là biến cố "Trong 2 sản phẩm lấy ra có đúng một sản phẩm có chất lượng tốt".
Suy ra $Y=\overline{A}B\cup A\overline{B}$
Do $\overline{A}B, A\overline{B}$ xung khắc và biến cố $\overline{A}$ và B; A và $\overline{B}$ độc lập nên ta có $P(Y)=P(\overline{A}B\cup A\overline{B})=P(\overline{A}B)+P(A\overline{B})$
$=P(\overline{A}).P(B)+P(A)P(\overline{B})=0,7.0.2+0,8.0,3=0,38$

Ví dụ 10: Một phòng được lắp hai hệ thống chuông báo động phòng cháy, một hệ thống báo khi thấy khói và một hệ thống báo khi thấy lửa xuất hiện. Qua thực nghiệm thấy rằng xác suất chuông báo khói là 0,95, chuông báo lửa là 0,91 và cả 2 chuông báo là 0,88. Tính xác suất để khi có hỏa hoạn ít nhất một trong 2 chuông sẽ báo.

Giải:

Gọi các biến cố
A : "Chuông báo khi thấy khói"
B : "Chuông báo khi thấy lửa"
C : "Ít nhất một trong hai chông báo khi hỏa hoạn"
Theo giả thiết bài toán ta có
P(A) = 0,95; P(B) = 0,91; P(AB) = 0,88
Do đó ta có:
$P(C)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=...=0,98$

BÀI TẬP THEO CHỦ ĐỀ.

Phần 1: Dùng Định Nghĩa

Bài 1: Gieo 1 con xúc xắc đối xứng và đồng chất.Tìm xác suất để được:
a) Mặt 6 chấm xuất hiện
b) Mặt có số chấm là số chẵn xuất hiện
HD: Gọi A,B lần lượt là các biến cố "Mặt 6 chấm xuất hiện" và "Mặt có số chấm là số chẵn xuất hiện".Ta có :

$$P(A)=\frac{1}{6}; P(B)=\frac{1}{2}$$

Bài 2: Có 100 tấm bìa hình vuông được đánh số từ 1 đến 100.Ta lấy ngẫu nhiên 1 tấm bìa.Tìm xác suất để lấy được:
a) Một tấm bìa có số không chứa chữ số 5 *(P = 0,8)*
b) Một tấm bìa có số chia hết cho 2 hoặc 5 hoặc cả 2 và 5 *(P_b= 0,6)*
Bài 3: Một hộp có chứa a quả cầu trắng và b quả cầu đen.Lấy ra lần lượt từ hộp từng quả cầu(một cách ngẫu nhiên).Tìm xác suất để
a) Quả cầu thứ 2 là trắng .
b) Quả cầu cuối cùng là trắng .*Đáp số:* $P_a = P_b = a/(a+b)$
Bài 4: Gieo đồng thời 2 đồng xu.Tìm xác suất để có:
a) Hai mặt cùng sấp xuất hiện (P=0,25)
b) Một mặt sấp,một mặt ngửa (P=0,5)
c) Có ít nhất 1 mặt sấp (P=0,75)
Bài 5: Gieo đồng thời 2 xúc xắc đối xứng và đồng chất.Tìm xác suất để được:
a) Tổng số chấm xuất hiện bằng 7 (P=1/6)
b) Tổng số chấm xuất hiện nhỏ hơn 8 (P=7/12)
c) Có ít nhất 1 mặt 6 chấm xuất hiện (P=11/36)
Bài 6: Thang máy của 1 toà nhà 7 tầng xuất phát từ tầng 1 với 3 khách.tìm xác suất để :
a) Tất cả cùng ra ở tầng 4 (P=1/216)
b) Tất cả cùng ra ở một tầng (P=1/36)
c) Mỗi người ra ở một tầng khác nhau (P=5/9)
Bài 7: Mỗi vé xổ số kí hiệu bởi 1 số có 5 chữ số.Tìm xác suất để 1 người mua 1 vé được:'
a/Vé có 5 chữ số khác nhau (P=0,3024)
b/Vé có 5 chữ số đều chẵn (P=0,03125)
Bài 8: 5 người A,B,C,D,E ngồi một cách ngẫu nhiên vào 1 chiếc ghế dài.Tìm xác suất để:

a) Người C ngồi chính giữa (P=0,2)
b) Hai người A,B ngồi ở 2 đầu (P=0,1)

Bài 9: Trong một chiếc hộp có n quả cầu được đánh số từ 1 đến n.Lấy ngẫu nhiên cùng lúc ra 2 quả cầu.Tính xác suất để người đó lấy được 1 quả có số hiệu lớn hơn k và một quả có số hiệu nhỏ hơn k

Đáp số: $P = \frac{2(k-1)(n-k)}{n(n-1)}$

Bài 10:* Có 10 người khách bước ngẫu nhiên vào một cửa hàng có 3 quầy.Hỏi xác suất để 3 người cùng đến quầy số 1 là bao nhiêu?
HD: Mỗi khách có 3 khả năng như nhau để đến 3 quầy.Số biến cố đồng khả năng là: 3^{10} .Còn số biến cố thuận lợi là: $C_{10}^3.2^7$ suy ra $P = \frac{C_{10}^3.2^7}{3^{10}}$

Bài 11: Có n người (trong đó có m người trùng tên) xếp ngẫu nhiên thành hàng ngang.Xác suất để m người trùng tên đó đứng cạnh nhau là bao nhiêu?

Đáp số: $P = \frac{(n-m+1)!m!}{n!}$

Phần 2: Dùng định lý xác suất

Bài 1: Một chi tiết máy được lấy ngẫu nhiên.Chi tiết loại 1(chi tiết A);chi tiết loại 2(chi tiết B);chi tiết loại 3(chi tiết C).Hãy mô tả các biến cố sau đây
a) $A \cup B$; b) $\overline{A+B}$; c) $(A.B) \cup C$; d) $A.C$

Bài 2: Ba người cùng bắn vào một mục tiêu.Gọi A_k là biến cố người thứ ba bắn trúng mục tiêu (k=1,2,3).Các biến cố sau đây được viết bằng kí hiệu ra sao?
a) Chỉ có người thứ nhất bắn trúng mục tiêu
b) Chỉ có một người bắn trúng mục tiêu
c) Chỉ có hai người bắn trúng mục tiêu
d) Có ít nhất một người bắn trúng mục tiêu

Bài 3: Khi kiểm tra theo thứ tự một lô hàng có 10 sản phẩm(các sản phẩm đều thuộc 1 trong 2 loại tốt hoặc xấu).Gọi A_k là biến cố "sản phẩm thứ k là loại xấu".Viết bằng kí hiệu các biến cố sau:
a) Cả 10 sản phẩm đều xấu
b) Có ít nhất 1 sản phẩm xấu
c) Sáu sản phẩm đầu là tốt còn lại là xấu
d) Các sản phẩm kiểm tra theo thứ tự chẵn là tốt,thứ tự lẻ là xấu.

Bài 4: Có 2 hộp đựng bi:hộp 1 đựng 3 bi trắng,7 bi đỏ,15 bi xanh ; hộp 2 đựng 10 bi trắng,6 bi đỏ,9 bi xanh.Ta lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp 1 viên bi.Tìm xác suất để 2 viên bi lấy ra cùng màu (P= 207/625)

Bài 5: Bắn liên tiếp vào 1 mục tiêu đến khi viên đạn đầu tiên trúng mục tiêu thì dừng.Tính xác suất sao cho phải bắn đến viên đạn thứ 6.Biết rằng xác suất trúng mục tiêu của mỗi viên đạn là 0,2.Và các lần bắn độc lập với nhau (P=0,065536)

Bài 6: Gieo 2 con xúc xắc đối xứng và đồng chất.Gọi A là biến cố tổng số chấm xuất hiện là số lẻ.B là biến cố được ít nhất một mặt một chấm.Hãy tính
a) P($A \cup B$) (P=23/36) ; b) P(AB) (P=1/6)

XÁC SUẤT TRONG CÁC ĐỀ THI

Bài 1: (ĐH Dân lập Kỹ thuật công nghệ -1997)
Trong một cái bình đựng 4 quả cầu xanh và 6 quả cầu đỏ hoàn toàn giống nhau về hình dáng và kích thước. Sau khi trộn đều, ta lấy ra ngẫu nhiên 3 quả cầu cùng một lúc. Tính xác suất để 3 quả cầu lấy ra có 2 quả cầu cùng màu .

Bài 2: (ĐH Nông nghiệp 1 -1997)
Một tổ gồm có 9 học sinh nam và 3 học sinh nữ .
a) Cần chọn một nhóm 4 người để làm trực nhật. Hỏi có bao nhiêu cách chọn khác nhau.?
b) Tính xác suất để khi chọn ngẫu nhiên một nhóm 4 người ,ta được nhóm có đúng 1 nữ.
c) Cần chia tổ đó thành 3 nhóm, mỗi nhóm 4 người để đi làm công việc khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách chia khác nhau? Tính xác suất để khi chia ngẫu nhiên ta được mỗi nhóm có đúng 1 nữ.

Bài 3: (ĐH Thủy lợi -1997)
Trong một chiếc hộp kín có chứa 10 quả cầu trắng và 8 quả cầu đỏ. Giả thiết rằng kích thước và trọng lượng của tất cả các quả cầu nói trên là y hệt nhau. Lấy ngẫu nhiên ra 5 quả cầu. Tính xác suất của biến cố : trong 5 quả cầu được lấy ra có đúng 3 quả cầu đỏ

Bài 4: (ĐH Tài chính kế toán Hà Nội-1997)
Một hộp bóng đèn có 12 bóng, trong đó có 7 bóng tốt. Lấy ngẫu nhiên 3 quả bóng.Tính xác suất để lấy được
a) 3 bóng tốt ?
b) Ít nhất 2 bóng tốt ?
c) Ít nhất 1 bóng tốt ?

Bài 5: (ĐH Dân lập kỹ thuật công nghệ -1997)
Có hai hộp đựng các viên bi có cùng kích thước. Hộp thứ nhất đựng 2 viên màu đen và 3 viên màu trắng. Hộp thứ hai đựng 3 viên màu đen và 4 viên màu trắng.
a) Lấy ngẫu nhiên ở mỗi hộp một viên bi. Tính xác suất để 2 viên bi lấy ra đều màu trắng ?
b) Dồn tất cả số bi ở hai hộp vào cùng một hộp, đem trộn đều rồi lấy ngẫu nhiên ra hai viên bi. Tính xác suất để hai viên bi lấy ra đều màu trắng.

Bài 6: (ĐH Đà nẵng-1997)
Tung 2 con xúc xắc đồng nhất .
a) Tìm xác suất của biến cố có tổng số chấm là 8 ?
b) Tìm xác suất của biến cố có tổng số chấm là số lẻ hoặc chia hết cho 3 ?

Bài 7: (ĐH Đà nẵng -1997)
Một tổ sinh viên có 6 nam và 5 nữ.
a) Tìm xác suất lấy ra 4 sinh viên đi lao động sao cho trong đó có 1 nữ .
b) Tìm xác suất lấy ra 4 sinh viên đi lao động sao cho trong đó có không quá 3 nữ .

Bài 8: (ĐH Giao thông vận tải -1997)
Một đợt xổ số phát hành 20000 vé trong đó có 1 giải nhất, 100 giải nhì, 200 giải ba, 1000 giải tư và 5000 giải khuyến khích. Tìm xác suất để một người mua 3 vé, trúng 1 giải nhì và 2 giải khuyến khích .

Bài 9: (ĐH Giao thông vận tải-1997)
Một đơn vị vận tải có 10 xe ô tô , trong đó có 6 xe tốt. Điều động một cách ngẫu nhiên 3 xe đi công tác. Tìm xác suất để trong 3 xe đó có ít nhất 1 xe tốt .

Bài 10: (ĐH Hàng hải -1997)
Hai xạ thủ cùng bắn mỗi người 1 phát đạn vào bia. Xác suất trúng đích của người thứ nhất là 0,9 và của người thứ hai là 0,7. Tính các xác suất sau đây biết rằng có :

a) Cả hai phát đều trúng ?
b) Ít nhất một phát trúng ?
c) Chỉ một phát trúng ?

Bài 11: (ĐH Xây dựng -1997)
Gieo một con xúc xắc vô tư 3 lần .
a) Hãy tính xác suất để ít nhất có 2 lần gieo mà số chấm xuất hiện như nhau ?
b) Gọi
A là biến cố " có ít nhất 1 lần mặt 6 chấm xuất hiện "
B là biến cố " số chấm xuất hiện ở ba lần gieo là 3 số khác nhau ". Tính P(A/B)?

Bài 12: (ĐH Y khoa Hà Nội -1998)
Một bà mẹ mong muốn sinh bằng được con gái (sinh được con gái rồi thì không sinh nữa; chưa sinh được con gái thì bà sẽ sinh nữa)
Xác suất sinh được con gái trong một lần sinh là 0,486. Tìm xác suất cho bà mẹ đạt được mong muốn ở lần sinh thứ hai ?

Bài 13: (ĐH Huế-1998)
Cho 8 quả cân có trọng lợng là : 1kg, 2kg, 3kg, 4kg, 5kg, 6kg, 7kg, 8kg. Chọn ngẫu nhiên 3 quả cân trong số đó .
a) Có bao nhiêu cách chọn nh thế ?
b) Tính xác suất để trọng lượng 3 quả cân đợc chọn không vượt quá 9 kg.

Bài 14: (ĐH Kt công nghệ TPHCM – A-1998)
Có hai bình chứa các biên bi chỉ khác nhau về màu. Bình thứ nhất có 3 viên bi màu xanh, 2 bi vàng, 1 bi đỏ. Bình thứ hai có 2 bi xanh, 1 bi vàng và 3 bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên từ mỗi bình 1 viên bi. Tính xác suất để được 2 bi xanh ?

Bài 15: (Cao đẳng Hải quan -1998-CB)
Một hộp chứa 12 bóng đèn, trong đó có 7 bóng tốt. Lấy ngẫu nhiên 3 bóng. Tính xác suất để lấy được:
a) 3 bóng tốt ?
b) Ít nhất 2 bóng tốt ?

Bài 16: (ĐH Giao thông vận tải-Đề 1-1998)
Ba xạ thủ độc lập bắn vào một bia, mỗi người bắn 1 viên đạn. Xác suất trúng đích của các xạ thủ lần lượt là: 0,6 ; 0,7; 0,8. Tính xác suất để có ít nhất 1 xạ thủ bắn trúng bia ?

Bài 17: (ĐH Sư phạm Quy nhơn -1998)
Có hai hộp đựng các viên bi chỉ khác nhau về màu. Hộp thứ nhất đựng 19 viên bi, trong đó có 4 viên bi trắng và 15 viên bi đen. Hộp thứ hai đựng 14 biên bi trong đó có 5 viên bi trắng và 9 viên bi đen. Từ mỗi hộp lấy ngẫu nhiên 1 viên bi . Tính xác suất để trong 2 viên bi đã lấy ra có 1 viên bi trắng và 1 viên bi đen

Bài 18: (ĐH Xây dựng Hà Nội -1998)
Cho ba hộp giống nhau. Mỗi hộp đựng 7 bút chì khác nhau về màu sắc.
Hộp thứ I có 3 màu đỏ,2 bút màu xanh,2 bút màu đen
Hộp thứ II có2 màu đỏ,2 bút màu xanh,3 bút màu đen
Hộp thứ III có5 màu đỏ,1bút màu xanh,1bút màu đen
Lấy ngẫu nhiên một hộp và rút từ hộp đó ra 2 bút .
1. Tìm xác suất để 2 bút đó có cùng màu xanh ?
2. Tìm xác suất để 2 bút đó không có màu đen ?

Bài 19: (ĐH Đà Nẵng -1998)
Có 2 xạ thủ loại I và 8 xạ thủ loại II, xác suất bắn trúng đích của các xạ thủ theo thứ tự là 0,9 và 0,8. Chọn ngẫu nhiên ra một xạ thủ và xạ thủ đó bắn một viên đạn. Tìm xác suất để viên đạn đó bắn trúng đích?

Bài 20: (ĐH Giao thông vận tải -1998)
Gieo đồng thời 3 đồng xu đối xứng và đồng chất. Tính xác suất để ít nhất có 1 mặt sấp xuất hiện .

Bài 21: (ĐH Đà nẵng- Khối A -1998)
Một lớp có 30 học sinh, trong đó gồm 8 học sinh giỏi, 15 học sinh khá và 7 học sinh trung bình.
Người ta muốn chọn ngẫu nhiên 3 em để đi dự Đại hội. Tính xác suất để :
a) Ba học sinh được chọn đều là học sinh giỏi ?
b)Có ít nhất 1 học sinh giỏi ?
c) Không có học sinh trung bình ?

Bài 22: (ĐH Tài chính kế toán Hà Nội-1998)
Một bình đựng 7 viên bi chỉ khác nhau về màu, trong đó có 4 viên bi màu xanh và 3 viên bi màu đỏ . Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi. Tính xác suất để được :
a) 2 viên bi màu đỏ và 1 viên bi màu xanh ?
b) Cả 3 viên bi đều màu xanh ?

Bài 23: (ĐH Văn Lang-Khối A,B-1998)
Một nhóm ca sĩ gồm 4 nữ và 6 nam.Chọn ngẫu nhiên từ nhóm đó 3 ca sĩ để lập nhóm tam ca. Gọi X là số nữ ca sĩ có được trong mỗi lần lấy. Tính xác suất của các biến cố : X=0; X=1, X=2, X=3.

Bài 24: (ĐH Quốc gia TPHCM-Khối D-Đợt 1-1999)
1.Gieo liên tiếp 3 lần một con xúc xắc. Tìm xác suất của biến cố : tổng số chấm không nhỏ hơn 16 ?
2. Xếp ngẫu nhiên 5 chữ cái : B, G, N, O, O. Tìm xác suất để đọc chữ BOONG ?

Bài 25: (Cao đẳng SP TPHCM -1999)
Một hộp đựng 10 viên bi, trong đó 6 viên màu xanh và 4 viên màu đỏ. Lấy ngẫu nhiên từ hộp ra 3 viên bi. Tính xác suất để trong 3 viên bi lấy ra có :
a) Cả 3 viên đều màu xanh ?
b) ít nhất là 1 viên bi màu xanh ?

Bài 26: (ĐH An ninh Phân hiệu TPHCM-1999)
Trong 1 hộp có 12 bóng đèn giống nhau, trong đó có 4 bóng hỏng. Lấy ngẫu nhiên ra 3 bóng. Tính xác suất để :
a) Được 3 bóng tốt ? ; b) Được 3 bóng hỏng ?
c) Được đúng 1 bóng tốt ? ; d) Được ít nhất 1 bóng tốt ?

Bài 27: (ĐH Dân lập kỹ thuật công nghệ- Khối D-1999)
Một hộp đựng 6 viên bi xanh và 4 viên bi đỏ có kích thước và trọng lượng như nhau. Lấy ngẫu nhiên ra 5 viên bi. Tìm xác suất để lấy được ít nhất 3 viên bi đỏ ?

Bài 28: (ĐH Đà nẵng- Khối A-1999)
Hai máy bay ném bom một mục tiêu, mỗi máy bay ném 1 quả với xác suất trúng mục tiêu tương ứng là : 0,7 và 0,8. Tìm xác suất để mục tiêu bị trúng bom ?

Bài 29: (ĐH Kinh tế quốc dân Hà Nội-1999)
Trong một hộp có 4 viên bi đỏ và 3 viên bi xanh (các viên bi chỉ khác nhau về màu sắc). Lấy ngẫu nhiên từ hộp ra 3 viên bi cùng một lúc. Tính xác suất để trong 3 viên bi lấy ra có đúng 2 viên bi màu đỏ ?

Bài 30: (Cao đẳng kinh tế đối ngoại -1999)
Chọn ngẫu nhiên một số nguyên n gồm 3 chữ số khác nhau. Tính xác suất để n là một số chẵn.

Bài 31: (ĐH Giao thông vận tải Hà Nội - 2000)
Môt lô hàng có 10 sản phẩm, trong đó có 2 phế phẩm. Lấy tuỳ ý 6 sản phẩm từ lô hàng đó. Hãy tìm xác suất để trong 6 sản phẩm lấy ra có không quá 1 phế phẩm ?