CHUYÊN ĐỀ SỐ PHỨC

A. CHUẨN BỊ KIẾN THỨC

I. DẠNG ĐẠI SỐ CỦA SỐ PHỨC .

1. Một số phức là một biểu thức có dạng $a + bi$, trong đó a, b là các số thực và số i thoả mãn $i^2 = -1$. Ký hiệu số phức đó là z và viết $z = a + bi$.

i được gọi là đơn vị ảo

a được gọi là phần thực. Ký hiệu Re(z) = a

b được gọi là phần ảo của số phức $z = a + bi$, ký hiệu Im(z) = b

Tập hợp các số phức ký hiệu là C.

**) Một số lưu ý:*

- Mỗi số thực a dương đều được xem như là số phức với phần ảo b = 0.
- Số phức $z = a + bi$ có a = 0 được gọi là số thuần ảo hay là số ảo.
- Số 0 vừa là số thực vừa là số ảo.

2. Hai số phức bằng nhau.

Cho $z = a + bi$ và $z' = a' + b'i$.

$$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$$

3. Biểu diễn hình học của số phức.

Mỗi số phức được biểu diễn bởi một điểm M(a;b) trên mặt phẳng toạ độ Oxy.

Ngược lại, mỗi điểm M(a;b) biểu diễn một số phức là $z = a + bi$.

4. Phép cộng và phép trừ các số phức.

Cho hai số phức $z = a + bi$ và $z' = a' + b'i$. Ta định nghĩa:

$$\boxed{\begin{cases} z + z' = (a + a') + (b + b')i \\ z - z' = (a - a') + (b - b')i \end{cases}}$$

5. Phép nhân số phức.

Cho hai số phức $z = a + bi$ và $z' = a' + b'i$. Ta định nghĩa:

$$\boxed{zz' = aa' - bb' + (ab' - a'b)i}$$

6. Số phức liên hợp.

Cho số phức $z = a + bi$. Số phức $\bar{z} = a - bi$ gọi là số phức liên hợp với số phức trên.

Vậy $\bar{z} = \overline{a + bi} = a - bi$

Chú ý: 1^0) $\bar{\bar{z}} = z \Rightarrow z$ và $\bar{z}$ gọi là hai số phức liên hợp với nhau.

2^0) $z.\bar{z} = a^2 + b^2$

*) Tính chất của số phức liên hợp:

(1): $\overline{\overline{z}} = z$

(2): $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$

(3): $\overline{z.z'} = \overline{z}.\overline{z'}$

(4): z. $\overline{z}$ = $\sqrt{a^2 + b^2}$ (z = $a + bi$)

7. Môđun của số phức.

Cho số phức z = $a + bi$. Ta ký hiệu $|z|$ là môđun của số phư z, đó là số thực không âm được xác định như sau:

- Nếu M(a;b) biểu diễn số phc z = $a + bi$, thì $|z| = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{a^2 + b^2}$

- Nếu z = a + bi, thì $|z| = \sqrt{z.\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$

8. Phép chia số phức khác 0.

Cho số phức z = $a + bi \neq 0$ *(tức là $a^2+b^2 > 0$)*

Ta định nghĩa số nghịch đảo z^{-1} của số phức z ≠ 0 là số

$$z^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2}\overline{z} = \frac{1}{|z|^2}\overline{z}$$

Thương $\frac{z'}{z}$ của phép chia số phức z’ cho số phức z ≠ 0 được xác định như sau:

$$\frac{z'}{z} = z.z^{-1} = \frac{z'.\overline{z}}{|z|^2}$$

Với các phép tính cộng, trừ, nhân chia số phức nói trên nó cũng có đầy đủ tính chất giao hoán, phân phối, kết hợp như các phép cộng, trừ, nhân, chia số thực thông thường.

II. DẠNG LƯỢNG GIÁC CỦA SỐ PHỨC.

1. Cho số phức z ≠ 0. Gọi M là một điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn số phức z. Số đo (radian) của mỗi góc lượng giác tia đầu là Ox, tia cuối OM được gọi là một acgumen của z.

Như vậy nếu φ là một acgumen của z, thì mọi acgumen đều có dạng:

φ + 2kπ, k ∈ Z.

2. Dạng lượng giác của số phức.

Xét số phức $z = a + bi \neq 0$ (a, b ∈ R)

Gọi r là môđun của z và φ là một acgumen của z.

Ta có: a = rcosφ , b = rsinφ

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, trong đó r > 0, được gọi là dạng lượng giác của số phức z ≠ 0.

$z = a + bi$ (a, b ∈ R) gọi là dạng đại số của z.

3. Nhân và chia số phức dưới dạng lượng giác.

Nếu $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$z' = r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')$ ($r \geq 0$, $r' \geq 0$)

thì: $z.z' = r.r[\cos(\varphi + \varphi') + i\sin(\varphi + \varphi')]$

$\frac{z'}{z} = \frac{r'}{r}\left[\cos(\varphi' - \varphi) + i\sin(\varphi' - \varphi)\right]$ khi $r > 0$.

4. Công thức Moivre.

$[z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$

5. Căn bậc hai của số phức dưới dạng lượng giác.

Cho số phức $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ($r>0$)

Khi đó z có hai căn bậc hai là: $\sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right)$

và $-\sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right) = \sqrt{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{2} + \pi\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{2} + \pi\right)\right)$

B. MỘT SỐ DẠNG TOÁN CƠ BẢN.

VẤN ĐỀ 1: DẠNG ĐẠI SỐ CỦA SỐ PHỨC

Dạng 1: Các phép tính về số phức.

Phương pháp giải:

Sử dụng các công thức cộng , trừ, nhân, chia và luỹ thừa số phức.

Chú ý cho HS: Trong khi tính toán về số phức ta cũng có thể sử dụng các hằng đẳng thức đáng nhớ như trong số thực. Chẳng hạn bình phương của tổng hoặc hiệu, lập phương của tổng hoặc hiệu 2 số phức…

<u>Ví dụ 1:</u> Cho số phức $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

Tính các số phức sau: $\bar{z}$; z^2; $(\bar{z})^3$; $1 + z + z^2$

Giải:

a) Vì $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \Rightarrow \bar{z} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

b) Ta có $z^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}i^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$\Rightarrow (\bar{z})^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}i^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$(\bar{z})^3 = (\bar{z})^2 . \bar{z} = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2}i + \frac{3}{4}i - \frac{\sqrt{3}}{4} = i$

Ta có: $1 + z + z^2 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \frac{3+\sqrt{3}}{2} - \frac{1+\sqrt{3}}{2}i$

Nhận xét: Trong bài toán này, để tính $\left(\bar{z}\right)^3$ ta có thể sử dụng hằng đẳng thức như trong số thực.

Ví dụ 2: Tìm số phức liên hợp của: $z = (1+i)(3-2i) + \frac{1}{3+i}$

Giải:

Ta có : $z = 5 + i + \frac{3-i}{(3+i)(3-i)} = 5 + i + \frac{3-i}{10}$

Suy ra số phức liên hợp của z là: $\bar{z} = \frac{53}{10} - \frac{9}{10}i$

Ví dụ 3: Tìm mô đun của số phức $z = \frac{(1+i)(2-i)}{1+2i}$

Giải: Ta có : $z = \frac{5+i}{5} = 1 + \frac{1}{5}i$

Vậy, mô đun của z bằng: $|z| = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{26}}{5}$

Ví dụ 4: Tìm các số thực x, y thoả mãn:

$$3x + y + 5xi = 2y - 1 + (x - y)i$$

Giải:

Theo giả thiết: $3x + y + 5xi = 2y - 1 + (x - y)i$

$\Leftrightarrow (3x + y) + (5x)i = (2y - 1) + (x - y)i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y = 2y - 1 \\ 5x = x - y \end{cases}$ Giải hệ này ta được: $\begin{cases} x = -\frac{1}{7} \\ y = \frac{4}{7} \end{cases}$

Ví dụ 5: Tính:

$$i^{105} + i^{23} + i^{20} - i^{34}$$

Giải:

Để tính toán bài này, ta chú ý đến định nghĩa đơn vị ảo để từ đó suy ra luỹ thừa của đơn vị ảo như sau:

Ta có: $i^2 = -1$; $i^3 = -i$; $i^4 = i^3.i = 1$; $i^5 = i$; $i^6 = -1$…

Bằng quy nạp dễ dàng chứng minh được: $i^{4n} = 1$; $i^{4n+1} = i$; $i^{4n+2} = -1$; $i^{4n+3} = -i$; $\forall n \in N^*$

Vậy $i^n \in \{-1;1;-i;i\}$, $\forall n \in N$.

Nếu n nguyên âm, $i^n = (i^{-1})^{-n} = \left(\frac{1}{i}\right)^{-n} = (-i)^{-n}$.

Như vậy theo kết quả trên, ta dễ dàng tính được:

$i^{105} + i^{23} + i^{20} - i^{34} = i^{4.26+1} + i^{4.5+3} + i^{4.5} - i^{4.8+2} = i - i + 1 + 1 = 2$

Ví dụ 6: Tính số phức sau:

$$z = (1+i)^{15}$$

Giải:

Ta có: $(1 + i)^2 = 1 + 2i - 1 = 2i \Rightarrow (1 + i)^{14} = (2i)^7 = 128.i^7 = -128.i$

$z = (1+i)^{15} = (1+i)^{14}(1+i) = -128i\,(1+i) = -128\,(-1 + i) = 128 - 128i.$

Ví dụ 7: Tính số phức sau: $z = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{16} + \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{8}$

Giải:

Ta có: $\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{2} = \frac{2i}{2} = i$

$\Rightarrow \frac{1-i}{1+i} = -i$. Vậy $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{16} + \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{8} = i^{16} + (-i)^8 = 2$

Dạng 2: Các bài toán chứng minh.

Trong dạng này ta gặp các bài toán chứng minh một tính chất, hoặc một đẳng thức về số phức.

Để giải các bài toán dạng trên, ta áp dụng các tính chất của các phép toán cộng, trừ, nhân, chia, số phức liên hợp, môđun của số phức đã được chứng minh.

Ví dụ 8: Cho $z_1, z_2 \in C$.

CMR: $E = z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}.z_2 \in R$

Để giải bài toán này ta sử dụng một tính chất quan trọng của số phức liên hợp đó là:

$z \in R \Leftrightarrow z = \overline{z}$

Thật vậy: Giả sử $z = x + yi \Rightarrow \overline{z} = x - yi$.

$z = \bar{z} \Leftrightarrow x + yi = x - yi \Leftrightarrow y = 0 \Rightarrow z = x \in R$

Giải bài toán trên:

Ta có $\bar{E} = \overline{z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1.z_2} = \bar{z}_1 z_2 + z_1\bar{z}_2 = E \Rightarrow E \in R$

Ví dụ 9: Chứng minh rằng:

1) $E_1 = \left(2+i\sqrt{5}\right)^7 + \left(2-i\sqrt{5}\right)^7 \in R$

2) $E_2 = \left(\frac{19+7i}{9-i}\right)^n + \left(\frac{20+5i}{7+6i}\right)^n \in R$

Giải:

1) Ta có: $\overline{E_1} = \overline{\left(2+i\sqrt{5}\right)^7 + \left(2-i\sqrt{5}\right)^7} = \overline{\left(2+i\sqrt{5}\right)^7} + \overline{\left(2-i\sqrt{5}\right)^7} = \left(2-i\sqrt{5}\right)^7 + \left(2+i\sqrt{5}\right)^7 = E_1 \Rightarrow E_1 \in R$

2) $E_2 = \left(\frac{19+7i}{9-i}\right)^n + \left(\frac{20+5i}{7+6i}\right)^n = \left(\frac{(19+7i)(9+i)}{82}\right)^n + \left(\frac{(20+5i)(7-6i)}{85}\right)^n$

$= \left(\frac{164+82i}{82}\right)^n + \left(\frac{170-85i}{85}\right)^n = (2+i)^n + (2-i)^n$

$\Rightarrow \overline{E_2} = E_2 \Rightarrow E_2 \in R$

Ví dụ 10: Cho $z \in C$.

CMR: $|z+1| \ge \frac{1}{\sqrt{2}}$ hoặc $|z^2 + 1| \ge 1$

Giải:

Ta chứng minh bằng phản chứng: Giả sử $\begin{cases} |z+1| < \frac{1}{\sqrt{2}} \\ |z^2+1| < 1 \end{cases}$

Đặt $z = a+bi \Rightarrow z^2 = a^2 - b^2 + 2a + bi$

$$\begin{cases} |z+1| < \frac{1}{\sqrt{2}} \\ |z^2+1| < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1+a)^2 + b^2 < \frac{1}{2} \\ (1+a^2-b^2) + 4a^2b^2 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(a^2+b^2) + 4a + 1 < 0 \\ (a^2+b^2)^2 + 2(a^2-b^2) < 0 \end{cases}$$

Cộng hai bất đẳng thức trên ta được: $(a^2 + b^2)^2 + (2a+1)^2 < 0 \Rightarrow$ vô lý $\Rightarrow$ đpcm

Dạng 3: Các bài toán về môđun của số phức và biểu diễn hình học của số phức.

Trong dạng này, ta gặp các bài toán biểu diễn hình học của số phức hay còn gọi là tìm tập hợp điểm biểu diễn một số phức z trong đó số phức z thoả mãn một hệ thức nào đó (thường là hệ thức liên quan đến môđun của số phức). Khi đó ta giải bài toán này như sau:

Giả sử $z = x+yi$ ($x, y \in R$). Khi đó số phức z biểu diễn trên mặt phẳng phức bởi điểm $M(x;y)$. Ta có: $OM = \sqrt{x^2+y^2} = |z|$

Sử dụng dữ kiện của đề bài để tìm mối liên hệ giữa x và y từ đó suy ra tập hợp điểm M.

Lưu ý:

- Với số thực dương R, tập hợp các số phức với $|z|$ = R biểu diễn trên mặt phẳng phức là đường tròn tâm O, bán kính R.
- Các số phức z, $|z|$ < R là các điểm nằm trong đường tròn (O;R)
- Các số phức z, $|z|$ >R là các điểm nằm ngoài đường tròn (O;R)

Ví dụ 11 : Giả sử M(z) là điểm trên mặt phẳng phức biểu diễn số phức z. Tìm tập hợp các điểm M(z) thoả mãn một trong các điều kiện sau đây:

1. $|z-1+i|$ =2
2. $|2+z|=|1-i|$
3. $|2+z|>|z-2|$
4. $|z-4i|+|z+4i|=10$
5. $1\le |z+1-i|\le 2$

Giải: 1) Xét hệ thức: $|z-1+i|$ =2 (1)

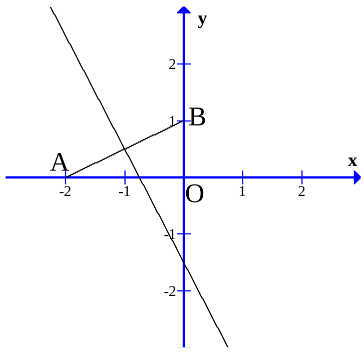
Đặt z = x +yi (x, y $\in$ R) $\Rightarrow$ z – 1 + i = (x – 1) + (y + 1)i.

Khi đó (1) $\Leftrightarrow$ $\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}=2$

$\Leftrightarrow$ $(x-1)^2 + (y + 1)^2 = 4$.$\Rightarrow$ Tập hợp các điểm M(z) trên mặt phẳng toạ độ biểu diễn số phức z thoả mãn (1) là đường tròn có tâm tại I(1;-1) và bán kính R = 2.

2) Xét hệ thức $|2+z|=|z-i|$ (2)

(2) $\Leftrightarrow$ $|z-(-2)|=|z-i|$ (*)



Gọi A là điểm biểu diễn số -2, còn B là điểm biểu diễn số phức i (A(-2;0); B(0;1))

Đẳng thức (*) chứng tỏ M*(z)*A = M*(z)*B.

Vậy tập hợp tất cả các điểm M(z) chính là đường trung trực của AB.

Chú ý: Ta có thể giải cách khác như sau:

Giả sử z = x + yi, khi đó:

(2) $\Leftrightarrow$ |(x+2) +yi| = |-x+(1-y)i| $\Leftrightarrow$ $(x+2)^2 + y^2 = x^2 + (1-y)^2$ $\Leftrightarrow$ 4x + 2y + 3 = 0.

vậy tập hợp các điểm M(z) là đường thẳng 4x + 2y + 3 = 0.

nhận xét: Đường thẳng 4x + 2y + 3 = 0 chính là phương trình đường trung trực của đoạn AB.

3) Xét: $|2+z|>|z-2|$ (3)

Giả sử z = x + yi, khi đó:

(3) ⇔ |2+x+yi| > |x+yi-2|

⇔ $(x+2)^2 + y^2 > (x-2)^2 + y^2$ ⇔ x > 0.

⇒ Tập hợp các điểm M(z) là nửa mặt phẳng ở bên phải trục tung, tức là các điểm (x;y) mà x > 0.

Nhận xét: Ta có thể giải cách khác như sau:

(3) ⇔ |z-(-2)| >|z-2|

Gọi A, B tương ứng là các điểm biểu diễn số thực -2 và 2, tức là A(-2;0), B(2;0).

Vậy (3) ⇔ M(z)A > M(z)B. Mà A, B đối xứng nhau qua Oy.

Từ đó suy ra tập hợp các điểm M(z) là nửa mặt phẳng ở bên phải trục tung.

4) Xét hệ thức: $|z-4i|+|z+4i|=10$

Xét F_1, F_2 tương ứng biểu diễn các điểm 4i và -4i tức là F_1 (0;4) và F_2 =(0;-4). Do đó:

(4) ⇔ $MF_1 + MF_2 = 10$ (M = M(z))

Ta có $F_1F_2 = 8$ ⇒ Tập hợp tất cả các điểm M nằm trên (E) có hai tiêu điểm là F_1 và F_2 và có độ dài trục lớn bằng 10.

Phương trình của (E) là: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$

5) Xét hệ thức $1\le |z+1-i|\le 2$ ⇔ $1\le |z-(-1+i)|\le 2$.

Xét điểm A(-1;1) là điểm biểu diễn số phức -1 + i. Khi đó $1\le$ MA ≤ 2.

Vậy tập hợp các điểm M(z) là hình vành khăn có tâm tại A(-1;1) và các bán kính lớn và nhỏ lần lượt là 2 và 1

Cách 2: Giả sử z = x +yi khi đó (5) ⇔ $1 \le |(x+1) +(y-1)i| \le 2$ ⇔ $1 \le (x+1)^2 + (y-1)^2 \le 4$

⇒ kết quả như ở trên.

<u>Ví dụ 12</u>: Xác định các điểm nằm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z thoả mãn một trong các điều kiện sau đây:

1. $|z + \bar{z} +3|=4$
2. $|z + \bar{z} + 1 - i| = 2$
3. $2|z-i|=|z-\bar{z} +2i|$
4. $|z^2 - \bar{z}^2| = 4$

Giải:

1) Xét hệ thức: $z + \bar{z} +3|=4$ (1)

Đặt x = x + yi ⇒ $\bar{z}$ = x – yi, do đó

(1) ⇔ |(x+yi)+(x-yi)+3|=4

$\Leftrightarrow |2x+3|=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{2} \\ x=-\frac{7}{2} \end{array}\right.$

Vậy tập hợp tất cả các điểm M là hai đường thẳng song song với trục tung x = $\frac{1}{2}$ và x = $-\frac{7}{2}$

2) Xét hệ thức: $|z + \bar{z} + 1 - i| = 2$.

Đặt z = x + yi ⇒ $\bar{z}$ = x – yi. Khi đó:

(2) $\Leftrightarrow |1+(2y-1)i| = 2 \Leftrightarrow 1 + (2y-1)^2 = 4 \Leftrightarrow 2y^2 - 2y - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ y=\frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$

Vậy tập hợp các điểm M là hai đường thẳng song song với trục hoành y = $\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$.

3) Xét hệ thức $2|z-i|=|z-\bar{z}+2i|$.

Đặt z = x + yi ⇒ $\bar{z}$ = x – yi. Khi đó: (3) $\Leftrightarrow |x+(y-1)i| = |(x+y)i|$

$\Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = (x+y)^2 \Leftrightarrow x^2 - 4y = 0 \Leftrightarrow y = \frac{x^2}{4}$.

Vậy tập hợp các điểm M là parabol y = $\frac{x^2}{4}$

4)Xét hệ thức: $|z^2 - \bar{z}^2| = 4$

Đặt z = x + yi ⇒ $\bar{z}$ = x – yi. Khi đó: (4) $\Leftrightarrow |4xyi| = 4 \Leftrightarrow 16x^2y^2 = 16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} xy=1 \\ xy=-1 \end{array}\right.$

Vậy tập hợp các điểm M là hai nhánh (H) xy = 1 và xy = -1

<u>Ví dụ 13</u>: Tìm số phức z thoả mãn hệ: $\begin{cases} \left|\frac{z-1}{z-i}\right|=1 \\ \left|\frac{z-3i}{z+i}\right|=1 \end{cases}$

Giải: Giả sử z = x + yi, khi đó $\left|\frac{z-1}{z-i}\right|=1 \Leftrightarrow |z-1| = |z-i| \Leftrightarrow |x+yi-1|=|x+yi-i|$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = x^2 + (y-1)^2 \Leftrightarrow x=y$.

Ta lại có: $\left|\frac{z-3i}{z+i}\right|=1 \Leftrightarrow |z-3i| = |z+i| \Leftrightarrow |x+yi-3i| = |x+yi+i| \Leftrightarrow x^2 + (y-3)^2 = x^2 + (y+1)^2$

$\Leftrightarrow y = 1 \Rightarrow x = 1$. Vậy số phức phải tìm là z =1+i

Ví dụ 14: Trong các số phức z thoả mãn điều kiện: $|z - 2+3i| = \frac{3}{2}$

Tìm số phức z có môđun nhỏ nhất.

Giải: Giả sử z = x + yi, khi đó : $|z - 2+3i| = \frac{3}{2} \Leftrightarrow |(x-2) +(y+3)i|=\frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+3)^2 = \frac{9}{4}$ $\Rightarrow$ Tập hợp điểm M thoả mãn điều kiện đã cho là đường tròn tâm I(2;-3) và bán kính 3/2.

Môđun của z đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi M thuộc đường tròn và gần O nhất $\Rightarrow$ M trùng với M_1 là giao của đường thẳng OI với đường tròn.

Ta có: $OI = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

Kẻ $M_1H \perp Ox$. Theo định lý Talet ta có:

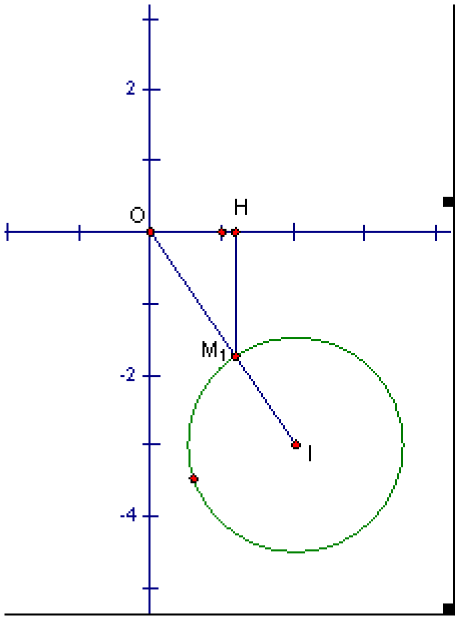
$$\frac{M_1H}{3} = \frac{OM_1}{OI} = \frac{\sqrt{13}-\frac{3}{2}}{\sqrt{13}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{13}M_1H = 3\sqrt{13} - \frac{9}{2} = \frac{6\sqrt{13}-9}{2}$$

$$\Rightarrow M_1H = \frac{6\sqrt{13}-9}{2\sqrt{13}} = \frac{78-9\sqrt{13}}{26}$$

Lại có: $\frac{OH}{2} = \frac{\sqrt{13}-\frac{3}{2}}{\sqrt{13}} \Rightarrow OH = \frac{26-3\sqrt{13}}{13}$

Vậy số phức cần tìm là: $z = \frac{26-3\sqrt{13}}{13} + \frac{78-9\sqrt{13}}{26}$



Ví dụ 15: Cho $z_1 = 1+i$; $z_2 = -1-i$. Tìm $z_3 \in C$ sao cho các điểm biểu diễn của z_1, z_2, z_3 tạo thành tam giác đều.

Giải:

Để giải bài toán này ta cần chú ý đến kiến thức sau:

Giả sử $M_1(x_1;y_1)$ biểu diễn số phức $z_1 = x_1 + y_1i$

Giả sử $M_2(x_2;y_2)$ biểu diễn số phức $z_2 = x_2 + y_2i$

Khi đó khoảng cách giữa hai điểm M_1M_2 bằng môđun của số phức $z_1 - z_2$.

Vậy: $M_1M_2 = |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$

Áp dụng vào bài toán:

Giả sử $z_3 = x+yi$

Để các điểm biểu diễn của z_1, z_2 , z_3 tạo thành một tam giác đều thì

$$\begin{cases}|z_1-z_2|=|z_1-z_3|\\|z_1-z_2|=|z_2-z_3|\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{4+4}=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}\\\sqrt{4+4}=\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)^2+(y-1)^2=8\\x+y=0\end{cases}$$

$\Rightarrow 2y^2 = 6 \Rightarrow y = \pm\sqrt{3} \Rightarrow x = \mp\sqrt{3}$

Vậy có hai số phức thoả mãn là: $z_3 = \sqrt{3}(1+i)$ và $z_3 = -\sqrt{3}(1-i)$

VẤN ĐỀ 2: GIẢI PHƯƠNG TRÌNH PHỨC.

Dạng 1: Tìm căn bậc hai của một số phức.

Cho số phức w = $a + bi$. Tìm căn bậc hai của số phức này.

Phương pháp:

+) Nếu w = 0 $\Rightarrow$ w có một căn bậc hai là 0

+) Nếu w = a > 0 (a $\in$ R) $\Rightarrow$ w có hai căn bậc hai là $\sqrt{a}$ và $-\sqrt{a}$

+) Nếu w = a < 0 (a $\in$ R) $\Rightarrow$ w có hai căn bậc hai là $\sqrt{-a}i$ và $-\sqrt{-a}i$

+) Nếu w = $a + bi$ (b $\neq$ 0)

Giả sử z = x +yi (x, y thuộc R) là một căn bậc hai của w $\Leftrightarrow z^2 = w \Leftrightarrow (x+yi)^2 = a + bi$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-y^2=a\\2xy=b\end{cases}$$

Để tìm căn bậc hai của w ta cần giải hệ này để tìm x, y. Mỗi cặp (x, y) nghiệm đúng phương trình đó cho ta một căn bậc hai của w.

Chú ý: Có rất nhiều cách để giải hệ này, sau đây là hai cách thường dùng để giải.

Cách 1: Sử dụng phương pháp thế: Rút x theo y từ phương trình (2) thế vào pt (1) rồi biến đổi thành phương trình trùng phương để giải.

Cách 2: Ta biến đổi hệ như sau:

$$\begin{cases}x^2-y^2=a\\2xy=b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x^2-y^2)^2=a^2\\(2xy)^2=b^2\\2xy=b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-y^2=a\\x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2}\\xy=b/2\end{cases}$$

Từ hệ này, ta có thể giải ra x^2 và y^2 một cách dễ dàng, sau đó kết hợp với điều kiện xy=b/2 để xem xét x, y cùng dấu hay trái dấu từ đó chọn được nghiệm thích hợp.

Nhận xét: Mỗi số phức khác 0 có hai căn bậc hai là hai số đối nhau.

Ví dụ 16: Tìm các căn bậc hai của mỗi số phức sau:

1) $4 + 6\sqrt{5}\,i$
2) $-1-2\sqrt{6}\,i$

Giải:

1) Giả sử z = x +yi (x, y thuộc R) là một căn bậc hai của w = $4 + 6\sqrt{5}\,i$

Khi đó: $z^2 = w \Leftrightarrow (x+yi)^2 = 4 + 6\sqrt{5}\,i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 4 \\ 2xy = 6\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{3\sqrt{5}}{x} & (1) \\ x^2 - \dfrac{45}{x^2} = 4 & (2) \end{cases}$

(2) $\Leftrightarrow x^4 - 4x^2 - 45 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$.

$x = 3 \Rightarrow y = \sqrt{5}$

$x = -3 \Rightarrow y = -\sqrt{5}$

Vậy số phức w = $4 + 6\sqrt{5}\,i$ có hai căn bậc hai là: $z_1 = 3 + \sqrt{5}\,i$ và $z_2 = -3 - \sqrt{5}\,i$

2) Giả sử z = x +yi (x, y thuộc R) là một căn bậc hai của w = $-1-2\sqrt{6}\,i$

Khi đó: $z^2 = w \Leftrightarrow (x+yi)^2 = -1-2\sqrt{6}\,i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -1 \\ 2xy = -2\sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{-\sqrt{6}}{x} & (1) \\ x^2 - \dfrac{6}{x^2} = -1 & (2) \end{cases}$

(2) $\Leftrightarrow x^4 + x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$.

$x = \sqrt{2} \Rightarrow y = -\sqrt{3}$

$x = -\sqrt{2} \Rightarrow y = \sqrt{3}$

Vậy số phức w = $4 + 6\sqrt{5}\,i$ có hai căn bậc hai là: $z_1 = \sqrt{2} - \sqrt{3}\,i$ và $z_2 = -\sqrt{2} + \sqrt{3}\,i$

Dạng 2: Giải phương trình bậc hai.

Cho phương trình bậc hai: $Az^2 + Bz + C = 0$ (1) ($A, B, C \in C, A \neq 0$)

Phương pháp:

Tính $\Delta = B^2 - 4AC$

*) Nếu $\Delta \neq 0$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $z_1 = \dfrac{-B+\delta}{2A}$, $z_2 = \dfrac{-B-\delta}{2A}$

(trong đó δ là một căn bậc hai của Δ).

*) Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình (1) có nghiệm kép: $z_1 = z_2 = -\dfrac{B}{2A}$

Ví dụ 17: Giải các phương trình bậc hai sau:

1) $z^2 + 2z + 5 = 0$
2) $z^2 + (1-3i)z - 2(1 + i) = 0$

Giải:

1) Xét phương trình: $z^2 + 2z + 5 = 0$

Ta có: $\Delta = -4 = 4i^2 \Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm: $z_1 = -1 + 2i$ và $z_2 = -1 - 2i$.

2) Ta có: $\Delta = (1-3i)^2 + 8(1+i) = 2i$.

Bây giờ ta phải tìm các căn bậc hai của 2i.

1) Giả sử $z = x + yi$ (x, y thuộc R) là một căn bậc hai của $w = 2i$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{x} \\ x^2 - \dfrac{1}{x^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy số phức 2i có hai căn bậc hai là: 1+i và -1 –i

$\Rightarrow$ Phương trình có hai nghiệm là: $z_1 = \dfrac{3i - 1 + 1 + i}{2} = 2i$

$$z_2 = \frac{3i - 1 - 1 - i}{2} = -1 + i$$

Nhận xét: Ngoài phương pháp tìm căn bậc hai như ở trên, đối với nhiều bài ta có thể phân tích Δ thành bình phương của một số phức. Chẳng hạn: $2i = i^2 + 2i + 1 = (i + 1)^2$ từ đó dễ dàng suy ra hai căn bậc hai của 2i là 1 + i và -1 – i.

Dạng 3: Phương trình quy về bậc hai

Đối với dạng này ta thường gặp phương trình bậc 3 hoặc phương trình bậc 4 dạng đặc biệt có thể quy được về bậc hai.

Đối với phương trình bậc 3 (hoặc cao hơn), về nguyên tắc ta cố gắng phân tích vế trái thành nhân tử (để đưa về phương trình tích) từ đó dẫn đến việc giải phương trình bậc nhất và bậc hai.

Đối với một số phương trình khác, ta có thể đặt ẩn phụ để quy về phương trình bậc hai mà ta đã biết cách giải.

3.1. Phương pháp phân tích thành nhân tử.

Ví dụ 18: Cho phương trình sau:

$z^3 + (2 - 2i)z^2 + (5 - 4i)z - 10i = 0$ (1)

1) Chứng minh rằng (1) nhận một nghiệm thuần ảo.
2) Giải phương trình (1).

Giải:

a) Đặt z = yi với $y \in R$

Phương trình (1) có dạng: $(iy)^3 + (2i-2)(yi)^2 + (5-4i)(yi) - 10i = 0$

$\Leftrightarrow -iy^3 - 2y^2 + 2iy^2 + 5iy + 4y - 10i = 0 = 0 + 0i$

đồng nhất hoá hai vế ta được:

$\begin{cases} -2y^2 + 4y = 0 \\ -y^3 + 2y^2 + 5y - 10 = 0 \end{cases}$ giải hệ này ta được nghiệm duy nhất y = 2

Vậy phương trình (1) có nghiệm thuần ảo z = 2i.

b) Vì phương trình (1) nhận nghiệm 2i

$\Rightarrow$ vế trái của (1) có thể phân tích dưới dạng:

$z^3 + (2 - 2i)z^2 + (5 - 4i)z - 10i = (z - 2i)(z^2 + az + b)$ $(a, b \in R)$

đồng nhất hoá hai vế ta giải được a = 2 và b = 5.

$\Rightarrow (1) \Leftrightarrow (z - 2i)(z^2 = 2z + 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2i \\ z^2 + 2z + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2i \\ z = -1 - 2i \\ z = -1 + 2i \end{cases}$

Vậy phương trình (1) có 3 nghiệm.

<u>Ví dụ 19:</u> Giải các phương trình:

1) $z^3 - 27 = 0$
2) $z^3 = 18 + 26i$, trong đó $z = x + yi$; $x,y \in Z$

Giải:

1) $z^3 - 27 = 0 \Leftrightarrow (z - 1)(z^2 + 3z + 9) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 1 \\ z^2 + 3z + 9 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 1 \\ z_{2,3} = \dfrac{-3 \pm 3\sqrt{3}i}{2} \end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm.

2) Ta có: $(x + yi)^3 = x^3 - 3xy^2 + (3x^2y - y^3)i = 18 + 26i$

Theo định nghĩa hai số phức bằng nhau, ta được: $\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 18 \\ 3x^2y - y^3 = 26 \end{cases}$

Từ hệ trên, rõ ràng $x \neq 0$ và $y \neq 0$.

Đặt y = tx , hệ $\Rightarrow 18(3x^2y - y^3) = 26(x^3 - 3xy^2)$

$\Rightarrow 18(3t - t^3) = 26(1 - 3t^2) \Leftrightarrow 18t^3 - 78t^2 - 54t + 26 = 0 \Leftrightarrow (3t - 1)(3t^2 - 12t - 13) = 0.$

Vì $x, y \in Z \Rightarrow t \in Q \Rightarrow t = 1/3 \Rightarrow x = 3$ và $y = 1 \Rightarrow z = 3 + i$.

<u>Ví dụ 20:</u>

1) Tìm các số thực a, b để có phân tích: $z^3 + 3z^2 + 3z - 63 = (z - 3)(z^2 + az + b)$
2) Giải phương trình: $z^3 + 3z^2 + 3z - 63 = 0$

Giải:

1) Giả thiết ⇔ $z^3 + 3z^2 + 3z - 63 = z^3 + (a-3)z^2 + (b-3a)z - 3b$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-3=3 \\ b-3a=3 \\ 3b=63 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=6 \\ b=21 \end{cases}$$

2) Áp dụng phần 1) ta có: $z^3 + 3z^2 + 3z - 63 = 0 \Leftrightarrow (z-3)(z^2 + 6z + 21) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=3 \\ z=-3+2\sqrt{3}i \\ z=-3-2\sqrt{3}i \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm.

<u>Ví dụ 21:</u> Giải phương trình:

$$z^4 - 4z^3 + 7z^2 - 16z + 12 = 0 \quad (1)$$

Giải:

Do tổng tất cả các hệ số của phương trình (1) bằng 0 nên (1) có nghiệm z = 1.

(1) ⇔ $(z-1)(z^3 - 3z^2 + 4z - 12) = 0$

⇔ $(z-1)(z-3)(z^2+4) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=1 \\ z=3 \\ z^2+4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=1 \\ z=3 \\ z=2i \\ z=-2i \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm.

3.2 Phương pháp đặt ẩn phụ.

<u>Ví dụ 22:</u> Giải phương trình:

$$(z^2 + z)^2 + 4(z^2 + z) - 12 = 0$$

Giải:

Đặt $t = z^2 + z$, khi đó phương trình đã cho có dạng:

$$t^2 + 4t - 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-6 \\ t=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z^2+z-6=0 \\ z^2+z-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=\dfrac{-1+\sqrt{23}i}{2} \\ z=\dfrac{-1-\sqrt{23}i}{2} \\ z=1 \\ z=-2 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm.

Ví dụ 23: Giải phương trình:
$(z^2 + 3z + 6)^2 + 2z(z^2 + 3z + 6) - 3z^2 = 0$

Giải:

Đặt $t = z^2 + 3z + 6$ phương trình đã cho có dang:

$t^2 + 2zt - 3z^2 = 0 \Leftrightarrow (t - z)(t + 3z) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = z \\ t = -3z \end{array}\right.$

+ Với $t = z \Leftrightarrow z^2 + 3z + 6 - z = 0 \Leftrightarrow z^2 + 2z + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = -1 + \sqrt{5}i \\ z = -1 - \sqrt{5}i \end{array}\right.$

+ Với $t = -3z \Leftrightarrow z^2 + 3z + 6 + 3z = 0 \Leftrightarrow z^2 + 6z + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = -3 + \sqrt{3} \\ z = -3 - \sqrt{3} \end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm.

Ví dụ 24: Cho phương trình: $z^4 - 2z^3 - z^2 - 2z + 1 = 0$ (1)

a) Bằng cách đặt $y = z + \frac{1}{z}$ hãy đưa phương trình về dạng: $y^2 - 2y - 3 = 0$.

b) Từ đó giải (1)

Giải:

Do $z = 0$ không là nghiệm của (1) $\Rightarrow$ chia hai vế của phương trình cho z^2 ta được:

$z^2 - 2z - 1 - 2\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = 0.$

Đặt $y = z + \frac{1}{z} \Rightarrow$ phương trình có dạng: $y^2 - 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -1 \\ y = 3 \end{array}\right.$

Với $y = -1 \Rightarrow = z + \frac{1}{z} = -1 \Leftrightarrow z = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

Với $y = 3 \Rightarrow = z + \frac{1}{z} = 3 \Leftrightarrow z = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm

Ví dụ 25: Giải phương trình:

$$z^4 - z^3 + \frac{z^2}{2} + z + 1 = 0 \qquad (1)$$

Giải:

Do $z = 0$ không phải là nghiệm của phương trình (1) nên:

(1) $\Leftrightarrow z^z - z + \frac{1}{2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = 0$

$\Leftrightarrow (z-\frac{1}{z})^2 - (z-\frac{1}{z}) + \frac{5}{2} = 0.$

Đặt $y = z-\frac{1}{z}$ $\Rightarrow$ pt có dạng: $y^2 - y + \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow 2y^2 - 2y + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \frac{1+3i}{2} \\ y = \frac{1-3i}{2} \end{array}\right.$

+) Với $y = \frac{1+3i}{2} \Rightarrow z - \frac{1}{z} = \frac{1+3i}{2} \Leftrightarrow 2z^2 - (1+3i)z - 2 = 0$ (2)

Ta có : $\Delta = (1+3i)^2 + 16 = 8 + 6i = (3+i)^2$

$\Rightarrow$ phương trình (2) có 2 nghiệm: $z_1 = 1+i$

$z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

+) Với $y = \frac{1-3i}{2} \Rightarrow z - \frac{1}{z} = \frac{1-3i}{2} \Leftrightarrow 2z^2 - (1-3i)z - 2 = 0$ (3)

Ta có : $\Delta = (1-3i)^2 + 16 = 8 - 6i = (3-i)^2$

$\Rightarrow$ phương trình (3) có 2 nghiệm: $z_3 = 1-i$

$z_4 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm.

Dạng 4: Giải hệ phương trình phức.

<u>Ví dụ 26</u>: Giải hệ phương trình 2 ẩn z và w:

$$\begin{cases} z + w = 3(1+i) & (1) \\ z^3 + w^3 = 9(-1+i) & (2) \end{cases}$$

Giải:

Từ (2) ta có: $(z + w)^3 - 3zw(z + w) = 9(-1+i)$ (3)

Thay (1) vào (3) ta được: $27(1+i)^3 - 9zw(1+i) = 9(-1+i)$

$\Rightarrow 3(1+3i+3i^2+i^3) - zw(1+i) = -1 + i$

$\Rightarrow zw = \frac{-5+5i}{1+i} = 5i$

Vậy ta có hệ phương trình: $\begin{cases} z + w = 3(1+i) \\ z.w = 5i \end{cases}$

Theo định lý Viet $\Rightarrow$ z, w là các nghiệm của phương trình: $t^2 - 3(1+i) + 5i = 0$ (4)

Ta có: $\Delta = -2i = (1 - i)^2$

$\Rightarrow$ Phương trình (4) có hai nghiệm $\left[\begin{array}{l} t = 2+i \\ t = 1+2i \end{array}\right.$

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm (z;w) là (2+i; 1+2i) và (1+2i;2+i)

Ví dụ 27: Giải hệ phương trình 2 ẩn z và w:

$$\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 = 1 & (1) \\ z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 = 1 & (2) \\ z_1z_2z_3 = 1 & (3) \end{cases}$$

Giải:

Ta có z_1, z_2 , z_3 là các nghiệm của phương trình: $(z - z_1)(z - z_2)(z-z_3) = 0$

$\Leftrightarrow z^3 - (z_1+z_2+z_3)z^2 + (z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1)z - z_1z_2z_3 = 0$

$\Leftrightarrow z^3 - z^2 + z - 1 = 0 \Leftrightarrow z = 1$ và $z = \pm i$

Vậy hệ phương trình đã cho có 6 nghiệm (là hoán vị của bộ ba số 1, i và –i)

VẤN ĐỀ 3: DẠNG LƯỢNG GIÁC CỦA SỐ PHỨC.

Dạng 1: Chuyển một số phức sang dạng lượng giác.

Phương pháp: Dạng lượng giác có dạng: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ trong đó $r > 0$.

Để chuyển một số phức sang dạng lượng giác ta cần tìm r và φ;

+ Ta có $r = |z|$

+ φ là số thực thoả mãn $\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{r} \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{r} \end{cases}$

Ví dụ 28: Viết các số phức sau dưới dạng lượng giác:

1) 2i
2) -1
3) 2
4) -3i
5) $z_1 = 6+6i\sqrt{3}$
6) $z_2 = -\dfrac{1}{4} + i\dfrac{\sqrt{3}}{4}$
7) $z_3 = 9 - 9i\sqrt{3}$

Giải:

1) Ta có: $r_1 = 2$, $\varphi = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow z_1 = 2(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2})$

2) Ta có: $r_2 = 1$, $\varphi = \pi \Rightarrow z_2 = \cos\pi + i\sin\pi$

3) Ta có: $r_3 = 2$, $\varphi = 0 \Rightarrow z_3 = 2(\cos 0 + i\sin 0)$

4) Ta có: $r_4 = 3$, $\varphi = \dfrac{3\pi}{2} \Rightarrow z_4 = 2(\cos\dfrac{3\pi}{2} + i\sin\dfrac{3\pi}{2})$

5) Ta có: $r_5 = 12$

Chọn φ là số thực thoả mãn $\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{1}{2} \\ \sin\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ $\Rightarrow$ φ = $\dfrac{\pi}{3}$ vậy z_5 = 12(cos$\dfrac{\pi}{3}$+isin$\dfrac{\pi}{3}$)

6) Ta có r_6 = $\sqrt{\left(\dfrac{-1}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \dfrac{1}{2}$

Chọn φ là số thực thoả mãn $\begin{cases} \cos\varphi = -\dfrac{1}{2} \\ \sin\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ $\Rightarrow$ φ = $\dfrac{2\pi}{3}$ vậy z_6 = 12(cos$\dfrac{2\pi}{3}$+isin$\dfrac{2\pi}{3}$)

7)Ta có: r_7 = 18

Chọn φ là số thực thoả mãn $\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{1}{2} \\ \sin\varphi = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ $\Rightarrow$ φ = $-\dfrac{\pi}{3}$ vậy z_7 = 12(cos($-\dfrac{\pi}{3}$)+isin($-\dfrac{\pi}{3}$))

Nhận xét: Đây là một dạng bài tập rất phổ biến, cần chú ý cho học sinh cách chọn số φ thỏa mãn hệ phương trình lượng giác $\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{r} \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{r} \end{cases}$. Trong quá trình dạy, tôi thấy rằng nhiều học sinh mắc sai lầm sau: chỉ tìm φ thỏa mãn cosφ = a/r mà không để ý đến sin φ = b/r. Chẳng hạn với hệ $\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{1}{2} \\ \sin\varphi = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ thì học sinh chọn φ =$\dfrac{\pi}{3}$.

<u>Ví dụ 29:</u> Viết các số phức sau dưới dạng lượng giác:

1) (1-i$\sqrt{3}$)(1+i)

2) $\dfrac{1-i\sqrt{3}}{1+i}$

3) $\dfrac{1}{2+2i}$

Giải: **1)** Ta có: 1- i$\sqrt{3}$ =$2\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right]$

(1+i) = $\sqrt{2}\left[\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right]$

Áp dụng công tthức nhân, chia số phức ta được:

$(1-i\sqrt{3})(1+i) = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right]$

2) $\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i}=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right]$

3) $\frac{1}{2+2i}=\frac{1}{4}(1-i)=\frac{1}{4}\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$

Ví dụ 30: Tìm phần thực và phần ảo của mỗi số phức sau:

1) $\frac{(1-i)^{10}}{\left(\sqrt{3}+i\right)^{9}}$

2) $\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)i^5(1+\sqrt{3}i)^7$

Giải:

1) Xét số phức:

$$\frac{(1-i)^{10}}{\left(\sqrt{3}+i\right)^{9}}=\frac{\left[\sqrt{2}\left(\cos-\frac{\pi}{4}+i\sin-\frac{\pi}{4}\right)\right]^{10}}{\left[2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]^{9}}=\frac{2^5\left(\cos-\frac{5\pi}{12}+i\sin-\frac{5\pi}{12}\right)}{2^9\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)}=\frac{1}{2^4(\cos\pi+i\sin\pi)}=-\frac{1}{16}$$

Vậy: phần thực bằng: $-\frac{1}{16}$ và phần ảo bằng 0.

2) Xét số phức:

$\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)i^5(1+\sqrt{3}i)^7=$

$\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)i\left[2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^7=2^7\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)-i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)i\left[\left(\cos\frac{7\pi}{3}+i\sin\frac{7\pi}{3}\right)\right]$

$=2^7\left[\cos 2\pi+i\sin 2\pi\right]i=2^7 i$

Vậy: phần thực bằng: 0 và phần ảo bằng 128.

Ví dụ 31: Tính số phức sau:

$$z = \frac{(1-i)^{10}\left(\sqrt{3}+i\right)^5}{\left(-1-i\sqrt{3}\right)^{10}}$$

Giải:

$$z = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^{10}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)^{10} 2^5\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^5}{2^{10}\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)^{10}}$$

$$= \frac{2^{10}\left(\cos\left(-\frac{10\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{10\pi}{4}\right)\right)\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)}{2^{10}\left(\cos\frac{40\pi}{3}+i\sin\frac{40\pi}{3}\right)} = \frac{\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right)}{\cos\frac{40\pi}{3}+i\sin\frac{40\pi}{3}}$$

$= \cos(-15\pi) + i\sin(-15\pi) = -1.$

Ví dụ 32: Viết các số sau dưới dạng lượng giác:

1) $\cos a - i\sin a$, $a \in [0;2\pi)$.
2) $\sin a + i(1+\cos a)$, $a \in [0;2\pi)$.
3) $\cos a + \sin a + i(\sin a - \cos a)$, $a \in [0;2\pi)$

Giải:

Ta có:

1) $\cos a - i\sin a = \cos(2\pi - a) + i\sin(2\pi - a)$ khi $a \in [0;2\pi)$

2) $z_2 = \sin a + i(1+\cos a) = 2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2} + 2i\cos^2\frac{a}{2} = 2\cos\frac{a}{2}(\sin\frac{a}{2} + i\cos\frac{a}{2})$

- Nếu $a \in [0;\pi) \Rightarrow \cos\frac{a}{2} > 0 \Rightarrow z_2 = 2\cos\frac{a}{2}(\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{a}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{a}{2})$

- Nếu $a \in (\pi;2\pi) \Rightarrow \cos\frac{a}{2} < 0 \Rightarrow z_2 = -2\cos\frac{a}{2}(\cos(\frac{3\pi}{2} - \frac{a}{2}) + i\sin(\frac{3\pi}{2} - \frac{a}{2})$

- Nếu $a \Rightarrow z_2 = 0(\cos 0 + i\sin 0)$

3) $z_3 = \cos a + \sin a + i(\sin a - \cos a) = \sqrt{2}(\cos\left(a - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(a - \frac{\pi}{4}\right)$

Dạng 2: Ứng dụng của dạng lượng giác.

Ví dụ 33: Chứng minh rằng:

$\sin 5t = 16\sin^5 t - 20\sin^3 t + 5\sin t$

$\cos 5t = 16\cos^5 t - 20\cos^3 t + 5\cos t$

Giải:

Dùng công thức Moivre và công thức khai triển nhị thức $(\cos t + i\sin t)^5$

Ta được:

$\cos 5t + i\sin 5t = \cos^5 t + 5i\cos^4 t\sin t + 10i^2\cos^3 t\sin^2 t + 10i^3\cos^2 t.\sin^3 t + 5i^4\cos t.\sin^4 t + i^5\sin^5 t$

$\Rightarrow \cos 5t + i\sin 5t = \cos^5 t - 10\cos^3 t(1-\cos^2 t) + 5\cos t(1-\sin^2 t)^2 + i[5(1-\sin^2 t)^2\sin t - 10(1-\sin^2 t)\sin^3 t + \sin^5 t]$

Đồng nhất hai vế ta được điều phải chứng minh.

Ngoài ứng dụng của công thức Moivre vào lượng giác, chúng ta có thể thấy nếu chuyển được một số phức về dạng lượng giác thì có thể tìm căn bậc hai một cách dễ dàng và nhanh chóng. Sau đây là một số ứng dụng của dạng lượng giác để tìm căn bậc hai của một số phức và giải phương trình bậc hai.

Ví dụ 34: Giải phương trình:

$$z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0 \quad (1)$$

Giải:

Ta có: (1) $\Leftrightarrow z^4(z + 1) + z^2(z + 1) + (z + 1) = 0$

$\Leftrightarrow (z+ 1)(z^4 + z^2 + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = -1 \\ z^4 + z^2 + 1 = 0 \end{array}\right.$$

Xét phương trình: $z^4 + z^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow z^2 = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z^2 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3} \\ z^2 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right) \end{array}\right.$

Từ $z^2 = \cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z = \cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3} \\ z = -\cos\dfrac{\pi}{3} - i\sin\dfrac{\pi}{3} \end{array}\right.$

Từ $z^2 = \cos\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z = \cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) \\ z = -\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) \end{array}\right.$

Tóm lại phương trình đã cho có tất cả 5 nghiệm:

$z = -1$; $z = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$; $z = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$; $z = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$; $z = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

Ví dụ 35: Cho z_1 và z_2 là hai số phứ xác định bởi $z_1 = 1+i\sqrt{3}$ và $z_2 = 1 – i$

a) Xác định dạng đại số và dạng lượng giác của $\dfrac{z_1}{z_2}$

b) Từ đó suy ra giá trị chính xác của: $\cos\dfrac{7\pi}{12}$ và $\sin\dfrac{7\pi}{12}$

Giải: Ta có $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i} = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2} + i\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$

Ta có: $z_1 = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$; $z_2 = \sqrt{2}(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right))$

$\Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12})$

$\Rightarrow \cos\frac{7\pi}{12} = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ và $\sin\frac{7\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$

Nhận xét: Qua bài tập này ta thấy được một ứng dụng quan trọng của số phức, ta có thể tính sin, cos của một góc bằng công cụ số phức thông qua sự liên hệ giữa dạng đại số và dạng lượng giác của số phức.

Ví dụ 36: Cho số phức z_0 có môđun bằng 1 và argument bằng $\frac{2\pi}{5}$

a) CMR z_0 là nghiệm của phương trình $z^5 – 1 = 0$
b) Rút gọn biểu thức $(z – 1)(1+z + z^2 + z^3 + z^4)$
c) Hãy suy ra rằng z_0 là nghiệm của phương trình: $\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)+\left(z+\frac{1}{z}\right) + 1 = 0$
d) Giải phương trình ở câu c)
e) Từ đó suy ra giá trị của z_0 và biểu thức giá trị của $\cos\frac{2\pi}{5}$ và $\sin\frac{2\pi}{5}$

Giải:

a) Ta có: $z_0 = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$

Áp dụng công thức Moavrơ ta có: $z_0^5 = (\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5})^5 = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1 \Rightarrow z_0$ là nghiệm của phương trình $z^5 – 1 = 0$.

b) Khai triển đẳng thức này ta được $z^5 – 1 = 0$.

c) $z^5 – 1 = 0 \Leftrightarrow (z – 1)(1+z + z^2 + z^3 + z^4) = 0$

mà $z_0 \neq 0 \Rightarrow z_0$ là nghiệm của phương trình $1+z + z^2 + z^3 + z^4 = 0 \Leftrightarrow z^2(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 + z + z^2)$

(với $z \neq 0$) $\Rightarrow z_0$ là nghiệm của phương trình $\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 + z + z^2 = 0$ (*) $\Rightarrow$ đpcm.

d) Đặt $y = z + \frac{1}{z} \Rightarrow$ phương trình (*) có dạng: $y^2 – y + 1 = 0 \Leftrightarrow y_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

e) Từ các câu trên ta có: z_0 là nghiệm của một trong hai phương trình sau: $z + \frac{1}{z} = y_1$ hoặc $z + \frac{1}{z} = y_2$

*) Xét phương trình: $z + \frac{1}{z} = y_1 \Leftrightarrow z^2 - y_1 z + 1 = 0 \Leftrightarrow z^2 + \frac{1-\sqrt{5}}{2} z + 1 = 0$

$$\Delta = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 - 4 = -\frac{5+\sqrt{5}}{2} = \left[i\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\right]^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} + \frac{i}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} \\ z_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} - \frac{i}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} \end{array}\right.$$

*) Xét phương trình: $z + \frac{1}{z} = y_2 \Leftrightarrow z^2 - y_2 z + 1 = 0 \Leftrightarrow z^2 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} z + 1 = 0$

$$\Delta = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - 4 = -\frac{5-\sqrt{5}}{2} = \left[i\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}\right]^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} + \frac{i}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} \\ z_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} - \frac{i}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} \end{array}\right.$$

Vì $\cos\frac{2\pi}{5}$ và $\sin\frac{2\pi}{5}$ đều dương $\Rightarrow$ phần thực và phần ảo của z_0 đều dương

$\Rightarrow z_0 = z_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} + \frac{i}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} \Rightarrow \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ và $\sin\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$

Ví dụ 37: Giải phương trình:

$$z^6 = -64 \quad (1)$$

Giải:

Giả sử $z = x + yi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

Ta có: $-64 = 64(\cos\pi + i\sin\pi)$

$Z^6 = -64 \Rightarrow r^6(\cos 6\varphi + i\sin 6\varphi) = 64(\cos\pi + i\sin\pi) \Rightarrow r^6 = 64 \Rightarrow r = 2$

Và $\cos 6\varphi + i\sin 6\varphi = \cos\pi + i\sin\pi \Rightarrow 6\varphi = \pi + 2k\pi$ $(k \in Z) \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6} + 2k\frac{\pi}{6}$

Với $k = 0 \Rightarrow z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + i$

Với $k = -1 \Rightarrow z_1 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \sqrt{3} - i$

Với $k = 1 \Rightarrow z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2i$

Với k = -2 $\Rightarrow$ z_1 = $2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$ = -2i

Với k = -3 $\Rightarrow$ z_1 = $2\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)$ = $-\sqrt{3}$ -i

<u>Ví dụ 38:</u> Tìm n là số nguyên dương và $n\in[1,10]$ sao cho số phức $z=\left(1+i\sqrt{3}\right)^n$ là số thực

Giải:

Ta có: 1 + i$\sqrt{3}$ = $2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ $\Rightarrow$ z = $2^n\left(\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3}\right)$

Để z $\in$ R $\Rightarrow$ $2^n.\sin\frac{n\pi}{3}$ = 0 $\Rightarrow$ $\sin\frac{n\pi}{3}$ = 0 $\Rightarrow$ n chia hết cho 3, mà n nguyên dương $\in$ [1;10] $\Rightarrow$ n $\in$ [3;6;9]

C. BÀI TẬP CỦNG CỐ KIẾN THỨC.

Các bài tập về dạng đại số của số phức

Bài 1: Chứng minh rằng: Nếu $|z_1| = |z_2| = 1$, $z_1.z_2 \neq 1$ thì $A = \frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2} \in R$

HD: Ta có: $\overline{A}=A$ suy ra A là số thực.

Bài 2: Tìm các điểm M trong mặt phẳng phức biểu diễn số phức z thoả mãn một trong các điều kiện sau:

a) $|z-2| = 3$

b) $|z+i|<1$

c) $|z-1+2i| > 3$

d) $\left|z+\frac{1}{z}\right|=2$

e) $\text{Re}\left(\frac{z-2}{z-1}\right)=0$

f) $\frac{1+\overline{z}}{z} \in R$

Đáp số:

a) Đường tròn tâm (2;0), bán kính bằng 3
b) Hình tròn tâm (0;-1), bán kính bằng 1
c) Phần ngoài đường tròn tâm (1;-2) bán kính bằng 3.
d) Giả sử z = x + yi $\Rightarrow$ $\left|z+\frac{1}{z}\right|=2 \Leftrightarrow \left|z^2+1\right|=2|z|$

$\Leftrightarrow (x^2 - y^2 + 1)^2 + 4x^2y^2 = 4(x^2 + y^2)$

$\Leftrightarrow (x^2 + y^2 - 1)^2 = 4y^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+y^2-1=2y \\ x^2+y^2-1=-2y \end{array}\right.$

$\Rightarrow$ Tập hợp các điểm M(x;y) biểu thị số phức z là hợp của hai đường tròn:

$x^2 + y^2 - 2y - 1 = 0$ và $x^2 + y^2 + 2y - 1 = 0$

e) Tập hợp các điểm M(x;y) là đường tròn: $x^2 + y^2 - 3x + 2 = 0$.

f) Giả sử z = x + yi $\Rightarrow \frac{1+\bar{z}}{z} = \frac{1+x-yi}{x+yi} = \frac{[(1+x)-yi](x-yi)}{x^2-y^2} = \frac{(1+x)x-y^2-[y(1+x)+xy]i}{x^2-y^2}$

Gt $\Rightarrow$ 2xy + y = 0 $\Rightarrow$ y = 0 hoặc x = -1/2.

Bài 3 : Tìm số thực x, y thỏa mãn đẳng thức : $x(3+5i) + y(1-2i)^3 = 9 + 14i$

Phương trình bậc hai, phương trình bậc cao, hệ phương trình

Bài 4: Giải các phương trình sau:

a) $z^2 = -9$

b) $z^2 = -\sqrt{5}$

c) $4z^2 - 2z + 1 = 0$

d) $z^2 - 2z\cos\alpha + 1 = 0$

e) $z^2 - (3-i)z + (4-3i) = 0$

Bài 5: Tìm số phức z biết $z^2 + |z| = 0$

Đáp số: z= 0; z = i; z = -i

Bài 6: a) Tìm các số phức a, b để có phân tích:

$z^4 + 2z^3 + 3z^2 + 2z + 2 = (z^2 + 1)(z^2 + az + b)$

b) Giải phương trình: $z^4 + 2z^3 + 3z^2 + 2z + 2 = 0$

Đáp số:

a) a = 2; b = 2

b) $z_{1,2} = \pm i$; $z_{3,4} = -1 \pm i$

Bài 7: Cho phương trình: $z^3 - 2(1+i)z^2 + 3iz + 1 - i = 0$ (1)

a) Chứng minh rằng z = 1 là một nghiệm của phương trình (1)

b) Tìm hai số α và β sao cho $z^3 - 2(1+i)z^2 + 3iz + 1 - i = (z-1)(z^2 + \alpha z + \beta) = 0$

c) Giải phương trình (1).

Đáp số:

a) $\alpha = -2i-1$; $\beta = i - 1$

b) z = 1; z = i ; z = 1+i

Bài 8: Giải các phương trình sau:

a) $z^4 + 3z^2 + 2 = 0$

b) $2z^4 + z^3 + 3z^2 + z + 2 = 0$

Bài 9: Cho hai phương trình sau

$z^4 - 4z^3 + 14z^2 - 36z + 45 = 0$

$z^4 + z^3 + 6z^2 + 4z + 8 = 0$

a) Chứng minh rằng phươn trình sau có hai nghiệm thuần ảo.

b) Hãy giải phương trình (1) và (2).

Bài 10: Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} z_1 z_2 = \dfrac{1}{2} \\ z_1 + 2z_2 = \sqrt{3} \end{cases}$$

Đáp số:

$\left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{4};\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)$ và $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{4};\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}\right)$

Dạng lượng giác của số phức và ứng dụng

Bài 11: Viết các số sau dưới dạng lượng giác:

a) $z_1 = 6 + 6i\sqrt{3}$

b) $z_2 = -\dfrac{1}{4} + i\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

c) $z_2 = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

d) $z_3 = 9 - 9i\sqrt{3}$

e) $z_5 = -4i$

Đáp số:

$z_1 = 12\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$; $z_2 = \dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$; $z_3 = \cos\dfrac{4\pi}{3} + i\sin\dfrac{4\pi}{3}$

$z_1 = 1218\left(\cos\dfrac{5\pi}{3} + i\sin\dfrac{5\pi}{3}\right)$; $z_2 = 4\left(\cos\dfrac{3\pi}{2} + i\sin\dfrac{3\pi}{2}\right)$;

Bài 12: Viết các số phức sau dưới dạng lượng giác:

a) $-2(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6})$

b) $\cos\dfrac{\pi}{17} - i\sin\dfrac{\pi}{17}$

c) $\sin\dfrac{\pi}{17} + i\cos\dfrac{\pi}{17}$

d) $1 - \cos a + i\sin a$, $a \in [0;2\pi)$

Đáp số:

a) $2(\cos\dfrac{7\pi}{6} + i\sin\dfrac{7\pi}{6})$

b) $\cos\left(-\dfrac{\pi}{17}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{17}\right)$

c) $\cos\frac{15\pi}{34} + i\sin\frac{15\pi}{34}$

d)

- Nếu a ∈ (0;2π) ⇒ $\sin\frac{a}{2} > 0 \Rightarrow$ $z_2 = 2\sin\frac{a}{2}(\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{a}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{a}{2}))$

- Nếu a = 0 ⇒ không tồn tại số phức dưới dạng lượng giác.

Bài 13: Cho số phức $z = 1+\sqrt{3}i$. Hãy viết dạng lượng giác của số phức z^5.

Bài 14: Sử dụng dạng lượng giác để tính số phức sau:

a) $\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-3+3i)\left(2\sqrt{3}+2i\right)$

b) (1+i)(-2-2i)i

c) $-2i(-4+4\sqrt{3}i)(3+3i)$

d) 3(1-i)(-5+5i)

Đáp số: a) $12\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4})$

b) 4(cos0 + isin0)

c) $48\sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12})$

d) $30(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$

Bài 15: Chứng minh rằng: $\left(\frac{-\sqrt{3}+i}{1+i}\right)^{12}$ là số thực

Đáp số: Sử dụng công thức Moavrơ : $\left(\frac{-\sqrt{3}+i}{1+i}\right)^{12}$ = -64

Bài 16: Tìm môđun của z và argument:

a) $z = \frac{\left(2\sqrt{3}+2i\right)^8}{(1-i)6} + \frac{(1+i)^6}{\left(2\sqrt{3}-2i\right)^8}$

b) $z = \frac{(-1+i)^4}{\left(\sqrt{3}-i\right)^{10}} + \frac{1}{\left(2\sqrt{3}+2i\right)^4}$

c) $z = \left(1+i\sqrt{3}\right)^n + \left(1-i\sqrt{3}\right)^n$

Đáp số:

a) $|z| = 2^{13} + \frac{1}{2^{13}}$; arg z = $\frac{5\pi}{6}$

b) $|z| = \frac{1}{2^9}$; arg z = π

c) $|z| = 2^{n+1}\left|\cos\frac{5n\pi}{3}\right|$; arg z = φ ∈ {0;π }

Bài 17 :Cho hai số phức $z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ và $z_2 = 1+\sqrt{3}i$

a) Tính môđun và argument của hai số phức nói trên.

b) Tính môđun và argument của z_1^3 và z_2^2 và $\frac{z_1^3}{z_2^2}$

c) Từ đó suy ra giá trị chính xác của $\cos\frac{\pi}{12}$ và $\sin\frac{\pi}{12}$

Đáp số :

a) Ta có $|z_1| = 2$; $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$; $|z_2| = 2$; $\varphi_2 = \frac{\pi}{3}$

b) $|z_1^3| = 8$; $\varphi_3 = \frac{3\pi}{4}$; $|z_2| = 4$; $\varphi_4 = \frac{2\pi}{3}$; $\left|\frac{z_1^3}{z_2^2}\right| = 2$; $\varphi_5 = \frac{\pi}{12}$

c) $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ và $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

Bài 18: Cho z là một số phức thoả mãn $z^2 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

a) Tính nghiệm của phương trình này và viết nghiệm dưới dạng lượng giác.

b) Hãy tính chính xác giá trị của $\cos\frac{\pi}{8}$ và $\sin\frac{\pi}{8}$

Bài 19: Tìm các căn bậc hai của số phức sau:

a) z = 1+i

b) z = i

c) $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$

d) $-2(1+i\sqrt{3})$

e) 7- 24i

Đáp số:

a) $z_k = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{2} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{2}\right)$, k ∈ {0;1}

b) $z_k = \cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}$, k ∈ {0;1}

c) $z_k = \cos\dfrac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{2} + i\sin\dfrac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{2}$, k ∈ {0;1}

d) $z_k = 2\left(\cos\dfrac{\frac{4\pi}{3}+2k\pi}{2} + i\sin\dfrac{\frac{4\pi}{3}+2k\pi}{2}\right)$, k ∈ {0;1}

e) $z_1 = 4-3i$; $z_2 = -4 + 3i$

Các bài toán về số phức trong đề thi tốt nghiệp và tuyển sinh đại học năm học 2009_2010

Bài 20 *(Câu 5a_TNPT 2009)*

Giải phương trình: $8z^2 - 4z + 1 = 0$ trên tập số phức.

Bài 21 *(Câu 5b_TNPT 2009)*

Giải phương trình: $2z^2 - iz + 1 = 0$ trên tập số phức.

Bài 22 (ĐHKA_2009)

Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình: $z^2 + 2z + 10 = 0$.

Tính giá trị của biểu thức $A = |z_1|^2 + |z_2|^2$

Đáp số: A = 20

Bài 23 (ĐHKB_2009)

Tìm số phức z thỏa nãm $|z-(2+i)| = \sqrt{10}$ và $z.\bar{z} = 25$

Đáp số: z = 3+4i hoặc z = 5.