

**BÀI TẬP TOÁN 10 NÂNG CAO**

**Bài 1:** Phát biểu các mệnh đề sau với thuật ngữ “Điều kiện cần”, “Điều kiện đủ”

- Nếu 2 tam giác bằng nhau thì chúng có cùng diện tích
- Số nguyên dương chia hết cho 6 thì chia hết cho 3
- Một hình thang có 2 đường chéo bằng nhau là hình thang cân

**Bài 2:** Dùng phương pháp chứng minh phản chứng để chứng minh:

- Với  $n$  là số nguyên dương, nếu  $n^2$  chia hết cho 3 thì  $n$  chia hết cho 3
- Chứng minh rằng  $\sqrt{2}$  là số vô tỷ
- Với  $n$  là số nguyên dương, nếu  $n^2$  là số lẻ thì  $n$  là số lẻ

**Bài 3:** Phát biểu các định lý sau đây bằng cách sử dụng khái niệm “Điều kiện đủ”

- Nếu trong mặt phẳng, hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ 3 thì hai đường thẳng đó song song với nhau
- Nếu 2 tam giác bằng nhau thì chúng có diện tích bằng nhau
- Nếu số nguyên dương  $a$  tận cùng bằng 5 thì chia hết cho 5
- Nếu tứ giác là hình thoi thì 2 đường chéo vuông góc với nhau

**Bài 4:** Phát biểu các định lý sau đây bằng cách sử dụng khái niệm “Điều kiện cần”

- Nếu trong mặt phẳng, hai đường thẳng cùng song song với đường thẳng thứ 3 thì hai đường thẳng đó song song với nhau
- Nếu 2 tam giác bằng nhau thì chúng có các góc tương ứng bằng nhau
- Số nguyên dương  $a$  chia hết cho 24 thì chia hết cho 4 và 6
- Nếu tứ giác ABCD là hình vuông thì 4 cạnh bằng nhau

**Bài 5:** Chứng minh bằng phương pháp phản chứng

- Nếu  $a \neq b \neq c$  thì  $a^2 + b^2 + c^2 > ab + bc + ca$
- Nếu  $a, b$  chia hết cho 7 thì  $a$  hoặc  $b$  chia hết cho 7
- Nếu  $x^2 + y^2 = 0$  thì  $x = 0$  và  $y = 0$

**Bài 6:** Cho các định lý sau, định lý nào có định lý đảo, hãy phát biểu:

- “Nếu 1 số tự nhiên chia hết cho 3 và 4 thì chia hết cho 12”
- “Một tam giác vuông thì có trung tuyến tương ứng bằng nửa cạnh huyền”
- “Hai tam giác đồng dạng và có 1 cạnh bằng nhau thì hai tam giác đó bằng nhau”
- “Nếu 1 số tự nhiên  $n$  không chia hết cho 3 thì  $n^2$  chia 3 dư 1”

**§3 Tập hợp**

**Bài 1:** Cho tập hợp  $A = \{x \in \mathbb{N} / x^2 - 10x + 21 = 0 \text{ hay } x^3 - x = 0\}$ . Hãy liệt kê tất cả các tập con của  $A$  chỉ chứa đúng 2 phần tử

**Bài 2:** Cho  $A = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + x - 12 = 0 \text{ và } 2x^2 - 7x + 3 = 0\}$  và  $B = \{x \in \mathbb{R} / 3x^2 - 13x + 12 = 0 \text{ hay } x^2 - 3x = 0\}$ . Xác định các tập hợp sau:  $A \cap B$ ;  $A \setminus B$ ;  $B \setminus A$ ;  $A \cup B$ .

**Bài 3:** Cho  $A = \{x \in \mathbb{N} / x < 7\}$  và  $B = \{1; 2; 3; 6; 7; 8\}$

- Xác định  $A \cup B$ ;  $A \cap B$ ;  $A \setminus B$ ;  $B \setminus A$
- CMR:  $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

**Bài 4:** Cho  $A = \{2; 5\}$ ;  $B = \{5; x\}$   $C = \{x; y; 5\}$ . Tìm các giá trị của cặp số  $(x; y)$  để tập hợp  $A = B = C$ .

**Bài 5:** Xác định các tập hợp sau bằng cách nêu tính chất đặc trưng

- $A = \{0; 1; 2; 3; 4\}$   
 $B = \{0; 4; 8; 12; 16\}$

$$C = \{-3; 9; -27; 81\}$$

$$D = \{9; 36; 81; 144\}$$

E = Đường trung trực đoạn thẳng AB

F = Đường tròn tâm I cố định có bán kính = 5 cm

**Bài 6:** Biểu diễn hình ảnh tập hợp A; B; C bằng biểu đồ Ven

$$A = \{0; 1; 2; 3\}$$

$$B = \{0; 2; 4; 6\}$$

$$C = \{0; 3; 4; 5\}$$

**Bài 7:** Hãy liệt kê tập A, B:

$$A = \{(x; x^2) / x \in \{-1; 0; 1\}\}$$

$$B = \{(x; y) / x^2 + y^2 \leq 2 \text{ và } x, y \in \mathbb{Z}\}$$

**Bài 8:** Cho  $A = \{x \in \mathbb{R} / |x| \leq 4\}$ ;  $B = \{x \in \mathbb{R} / -5 < x - 1 \leq 8\}$ . Viết các tập hợp sau dưới dạng khoảng – đoạn – nửa khoảng  $A \cap B$ ;  $A \setminus B$ ;  $B \setminus A$ ;  $\mathbb{R} \setminus (A \cup B)$ .

**Bài 9:** Cho  $A = \{x \in \mathbb{R} / x^2 \leq 4\}$ ;  $B = \{x \in \mathbb{R} / -2 \leq x + 1 < 3\}$ . Viết các tập hợp sau dưới dạng khoảng – đoạn – nửa khoảng  $A \cap B$ ;  $A \setminus B$ ;  $B \setminus A$ ;  $\mathbb{R} \setminus (A \cup B)$ .

**Bài 10:** Gọi  $N(A)$  là số phần tử của tập A. Cho  $N(A)=25$ ;  $N(B)=29$ ,  $N(A \cup B)=41$ . Tính  $N(A \cap B)$ ;  $N(A \setminus B)$ ;  $N(B \setminus A)$ .

**Bài 11:**

a) Xác định các tập hợp X sao cho  $\{a; b\} \subset X \subset \{a; b; c; d; e\}$ .

b) Cho  $A = \{1; 2\}$ ;  $B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ . Xác định các tập hợp X sao cho  $A \cup X = B$

c) Tìm A; B biết  $A \cap B = \{0; 1; 2; 3; 4\}$ ;  $A \setminus B = \{-3; -2\}$ ;  $B \setminus A = \{6; 9; 10\}$ .

**Bài 12:** Cho  $A = \{x \in \mathbb{R} / x \leq -3 \text{ hoặc } x > 6\}$  và  $B = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 25 \leq 0\}$

a) Tìm các khoảng, đoạn, nửa khoảng sau:  $A \setminus B$ ;  $B \setminus A$ ;  $\mathbb{R} \setminus (A \cup B)$ ;  $\mathbb{R} \setminus (A \cap B)$ ;  $\mathbb{R} \setminus (A \setminus B)$ .

b) Cho  $C = \{x \in \mathbb{R} / x \leq a\}$ ;  $D = \{x \in \mathbb{R} / x \geq b\}$ . Xác định a và b biết rằng  $C \cap B$  và  $D \cap B$  là các đoạn có chiều dài lần lượt là 7 và 9. Tìm  $C \cap D$ .

**Bài 13:** Cho  $A = \{x \in \mathbb{R} / x^2 \leq 4\}$ ;  $B = \{x \in \mathbb{R} / -3 \leq x < 2\}$ . Viết các tập hợp sau dưới dạng khoảng – đoạn – nửa khoảng  $A \cap B$ ;  $A \setminus B$ ;  $B \setminus A$ ;  $\mathbb{R} \setminus (A \cup B)$ .

**Bài 14:** Viết phần bù trong  $\mathbb{R}$  của các tập hợp sau:

$$A = \{x \in \mathbb{R} / -2 \leq x < 10\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} / |x| > 2\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} / -4 < x + 2 \leq 5\}$$

**Bài 15:** Cho  $T_v =$  tập hợp tất cả các tam giác vuông,

T = tập hợp tất cả các tam giác,

T<sub>c</sub> = tập hợp tất cả các tam giác cân,

T<sub>đ</sub> = tập hợp tất cả các tam giác đều,

T<sub>vc</sub> = tập hợp tất cả các tam giác vuông cân

Xác định tất cả các quan hệ bao hàm giữa các tập hợp trên

Cho tam giác ABC với trực tâm H, B' là điểm đối xứng với B qua tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác. Hãy xét quan hệ giữa các vectơ  $\overrightarrow{AH}$  và  $\overrightarrow{B'C}$ ;  $\overrightarrow{AB'}$  và  $\overrightarrow{HC}$ .

16 Cho bốn điểm A, B, C, D. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD.

a) Chứng minh:  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{IJ}$ .

b) Gọi G là trung điểm của IJ. Chứng minh:  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ .

c) Gọi P, Q là trung điểm của các đoạn thẳng AC và BD; M, N là trung điểm của các đoạn

thẳng AD và BC. Chứng minh rằng ba đoạn thẳng IJ, PQ và MN có chung trung điểm.

17 Cho tam giác ABC và một điểm M tùy ý.

a) Hãy xác định các điểm D, E, F sao cho  $\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BC}$ ,  $\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{CA}$ . Chứng minh các điểm D, E, F không phụ thuộc vào vị trí của điểm M.

b) So sánh hai tổng vector:  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$  và  $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF}$ .

18 Cho  $\Delta ABC$  với trung tuyến AM. Gọi I là trung điểm AM.

a) Chứng minh:  $2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$ .

b) Với điểm O bất kì, chứng minh:  $2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 4\overrightarrow{OI}$ .

19 Cho hình bình hành ABCD tâm O. Gọi I là trung điểm BC và G là trọng tâm  $\Delta ABC$ . Chứng minh:

a)  $2\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AB}$ .

b)  $3\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}$ .

20

Cho hình bình hành ABCD tâm O. Gọi I và J là trung điểm của BC, CD.

a) Chứng minh:  $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AB})$       b) Chứng minh:  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ} = \vec{0}$ .

c) Tìm điểm M thỏa mãn:  $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ .

19 Cho  $\Delta ABC$ . Tìm tập hợp các điểm M thỏa điều kiện:

a)  $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$

b)  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$

c)  $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}|$

d)  $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA}| + |\overrightarrow{MB}|$

e)  $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}|$

20 Cho  $\Delta ABC$  có A(4; 3), B(-1; 2), C(3; -2).

a) Tìm tọa độ trọng tâm G của  $\Delta ABC$ .

b) Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác ABCD là hình bình hành.

21 Cho A(2; 3), B(-1; -1), C(6; 0).

a) Chứng minh ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

b) Tìm tọa độ trọng tâm G của  $\Delta ABC$ .

c) Tìm tọa độ điểm D để tứ giác ABCD là hình bình hành.

22 Cho A(0; 2), B(6; 4), C(1; -1). Tìm tọa độ các điểm M, N, P sao cho:

a) Tam giác ABC nhận các điểm M, N, P làm trung điểm của các cạnh.

b) Tam giác MNP nhận các điểm A, B, C làm trung điểm của các cạnh.

23 Biết  $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ . Tính  $\cos 18^\circ$ ,  $\sin 72^\circ$ ,  $\sin 162^\circ$ ,  $\cos 162^\circ$ ,  $\sin 108^\circ$ ,  $\cos 108^\circ$ ,  $\tan 72^\circ$ .

24 Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

a)  $A = \cos^4 x - \cos^2 x + \sin^2 x$

b)  $B = \sin^4 x - \sin^2 x + \cos^2 x$

25 Cho các vector  $\vec{a}, \vec{b}$ .

a) Tính góc  $(\vec{a}, \vec{b})$ , biết  $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$  và hai vector  $\vec{u} = \vec{a} + 2\vec{b}$ ,  $\vec{v} = 5\vec{a} - 4\vec{b}$  vuông góc.

b) Tính  $|\vec{a} + \vec{b}|$ , biết  $|\vec{a}| = 11$ ,  $|\vec{b}| = 23$ ,  $|\vec{a} - \vec{b}| = 30$ .

c) Tính góc  $(\vec{a}, \vec{b})$ , biết  $(\vec{a} + 3\vec{b}) \perp (7\vec{a} - 5\vec{b})$ ,  $(\vec{a} - 4\vec{b}) \perp (7\vec{a} - 2\vec{b})$ .

d) Tính  $|\vec{a} - \vec{b}|$ ,  $|2\vec{a} + 3\vec{b}|$ , biết  $|\vec{a}| = 3$ ,  $|\vec{b}| = 2$ ,  $(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$ .

- e) Tính  $|\vec{a}|, |\vec{b}|$ , biết  $|\vec{a} + \vec{b}| = 2, |\vec{a} - \vec{b}| = 4, (2\vec{a} + \vec{b}) \perp (\vec{a} + 3\vec{b})$ .
- 26 Cho tam giác ABC có  $AB = 3, AC = 4, BC = 6$ .
- a) Tính  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  và  $\cos A$ .
- b) M, N là hai điểm được xác định bởi  $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$ . Tính MN.
- 27 Cho hình bình hành ABCD có  $AB = \sqrt{3}, AD = 1, \angle BAD = 60^\circ$ .
- a) Tính  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ .
- b) Tính độ dài hai đường chéo AC và BD. Tính  $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD})$ .
- 28 Cho tam giác ABC có góc A nhọn. Về phía ngoài tam giác vẽ các tam giác vuông cân đỉnh A là ABD và ACE. Gọi I là trung điểm của BC. Chứng minh  $AI \perp DE$ .
- 29 Cho tứ giác ABCD có hai đường chéo cắt nhau tại O. Gọi H, K lần lượt là trực tâm của các tam giác ABO và CDO. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AD và BC. Chứng minh  $HK \perp IJ$ .
- 30 Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng 1, M là trung điểm cạnh AB. Trên đường chéo AC lấy điểm N sao cho  $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$ .
- a) Chứng minh DN vuông góc với MN.
- b) Tính tổng  $\overrightarrow{DN} \cdot \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{CB}$ .
- 31 Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp các điểm M sao cho:
- a)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$
- b)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$
- c)  $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}) = 0$
- d)  $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$
- 32 Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta có:
- a)  $b^2 - c^2 = a(b \cos C - c \cos B)$
- b)  $(b^2 - c^2) \cos A = a(c \cos C - b \cos B)$
- b)  $\sin A = \sin B \cos C + \sin C \cos B = \sin(B + C)$
- 33 Cho  $\Delta ABC$ . Chứng minh rằng:
- a) Nếu  $(a + b + c)(b + c - a) = 3bc$  thì  $A = 60^\circ$ .
- b) Nếu  $\frac{b^3 + c^3 - a^3}{b + c - a} = a^2$  thì  $A = 60^\circ$ .
- c) Nếu  $\cos(A + C) + 3\cos B = 1$  thì  $B = 60^\circ$ .
- d) Nếu  $b(b^2 - a^2) = c(a^2 - c^2)$  thì  $A = 60^\circ$ .
- 34 Cho  $\Delta ABC$ . Chứng minh rằng:
- a) Nếu  $\frac{b^2 - a^2}{2c} = b \cos A - a \cos B$  thì  $\Delta ABC$  cân đỉnh C.
- b) Nếu  $\frac{\sin B}{\sin C} = 2 \cos A$  thì  $\Delta ABC$  cân đỉnh B.
- c) Nếu  $a = 2b \cos C$  thì  $\Delta ABC$  cân đỉnh A.
- d) Nếu  $\frac{b}{\cos B} + \frac{c}{\cos C} = \frac{a}{\sin B \sin C}$  thì  $\Delta ABC$  vuông tại A.

e) Nếu  $S = 2R^2 \sin B \sin C$  thì  $\Delta ABC$  vuông tại A.

35 Cho  $\Delta ABC$ . Chứng minh điều kiện cần và đủ để hai trung tuyến BM và CN vuông góc với nhau là:  $b^2 + c^2 = 5a^2$ .

36 Cho  $\Delta ABC$ .

a) Có  $a = 5, b = 6, c = 3$ . Trên các đoạn AB, BC lần lượt lấy các điểm M, K sao cho  $BM = 2, BK = 2$ . Tính MK.

b) Có  $\cos A = \frac{5}{9}$ , điểm D thuộc cạnh BC sao cho  $\angle ABC = \angle DAC$ ,  $DA = 6, BD = \frac{16}{3}$ . Tính chu vi tam giác ABC.

HD: a)  $MK = \frac{8\sqrt{30}}{15}$                       b)  $AC = 5, BC = \frac{25}{3}, AB = 10$

37 Cho một tam giác có độ dài các cạnh là:  $x^2 + x + 1; 2x + 1; x^2 - 1$ .

a) Tìm  $x$  để tồn tại một tam giác như trên.

b) Khi đó chứng minh tam giác ấy có một góc bằng  $120^\circ$ .

38 Cho  $\Delta ABC$  có  $B < 90^\circ$ , AQ và CP là các đường cao,  $S_{\Delta ABC} = 9S_{\Delta BPQ}$ .

a) Tính  $\cos B$ .

b) Cho  $PQ = 2\sqrt{2}$ . Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp  $\Delta ABC$ .

HD: a)  $\cos B = \frac{1}{3}$                       b)  $R = \frac{9}{2}$

39 Cho  $\Delta ABC$ .

a) Có  $B = 60^\circ, R = 2$ , I là tâm đường tròn nội tiếp. Tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp  $\Delta AIC$ .

b) Có  $A = 90^\circ, AB = 3, AC = 4$ , M là trung điểm của AC. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp  $\Delta BCM$ .

c) Có  $a = 4, b = 3, c = 2$ , M là trung điểm của AB. Tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp  $\Delta BCM$ .

HD: a)  $R = 2$                       b)  $R = \frac{5\sqrt{13}}{6}$                       c)  $R = \frac{8}{3}\sqrt{\frac{23}{30}}$

40 Cho hai đường tròn  $(O_1, R)$  và  $(O_2, r)$  cắt nhau tại hai điểm A và B. Một đường thẳng tiếp xúc với hai đường tròn tại C và D. Gọi N là giao điểm của AB và CD (B nằm giữa A và N). Đặt  $\angle A_1C = \alpha, \angle A_2D = \beta$ .

a) Tính AC theo R và  $\alpha$ ; AD theo r và  $\beta$ .

b) Tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp  $\Delta ACD$ .

HD: a)  $AC = 2R \sin \frac{\alpha}{2}, AD = 2r \sin \frac{\beta}{2}$                       b)  $\sqrt{Rr}$ .

41 Cho tứ giác ABCD nội tiếp trong đường tròn đường kính AC,  $BD = a, \angle CAB = \alpha, \angle CAD = \beta$ .

a) Tính AC.

b) Tính diện tích tứ giác ABCD theo a,  $\alpha, \beta$ .

HD: a)  $AC = \frac{a}{\sin(\alpha + \beta)}$       b)  $S = \frac{a^2 \cos(\beta - \alpha)}{2 \sin(\alpha + \beta)}$ .

- 42 Cho  $\Delta ABC$  cân đỉnh A,  $A = \alpha$ ,  $AB = m$ , D là một điểm trên cạnh BC sao cho  $BC = 3BD$ .  
 a) Tính BC, AD.  
 b) Chứng tỏ rằng đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABD, ACD là bằng nhau. Tính  $\cos \alpha$  để bán kính của chúng bằng  $\frac{1}{2}$  bán kính R của đường tròn ngoại tiếp  $\Delta ABC$ .

HD: a)  $BC = 2m \sin \frac{\alpha}{2}$ ,  $AD = \frac{m}{3} \sqrt{5 + 4 \cos \alpha}$       b)  $\cos \alpha = -\frac{11}{16}$ .

- 43 Cho ba điểm A(2; 1), B(-2; 2), M(x; y).  
 a) Tìm hệ thức giữa x và y sao cho tam giác AMB vuông tại M.  
 b) Tìm phương trình tham số và phương trình tổng quát của đường trung trực đoạn AB.  
 c) Tìm phương trình của đường thẳng d đi qua A và tạo với AB một góc  $60^\circ$ .

HD: a)  $x^2 + y^2 - 3y - 2 = 0$       b)  $8x - 2y + 3 = 0$

c)  $(4\sqrt{3} \mp 1)x - (\sqrt{3} \pm 4)y \pm 6 - 7\sqrt{3} = 0$

- 44 Cho ba đường thẳng  $d_1: 3x + 4y - 12 = 0$ ,  $d_2: 3x + 4y - 2 = 0$ ,  $d_3: x - 2y + 1 = 0$ .  
 a) Chứng tỏ rằng  $d_1$  và  $d_2$  song song. Tính khoảng cách giữa  $d_1$  và  $d_2$ .  
 b) Tìm phương trình đường thẳng d song song và cách đều  $d_1$  và  $d_2$ .  
 c) Tìm điểm M trên  $d_3$  cách  $d_1$  một đoạn bằng 1.

HD: a) 2      b)  $3x + 4y - 7 = 0$       c) M(3; 2) hoặc M(1; 1)

- 45 Cho điểm A(2; -3) và hai đường thẳng  $d: \begin{cases} x = 7 - 2m \\ y = -3 + m \end{cases}$ ,  $d': \begin{cases} x = -5 + 4t \\ y = -7 + 3t \end{cases}$ .

- a) Viết phương trình tham số của đường thẳng  $\Delta$  đi qua A và cắt d, d' tại B, B' sao cho  $AB = AB'$ .  
 b) Gọi M là giao điểm của d và d'. Tính diện tích của tam giác MBB'.

HD: a)  $\Delta: \begin{cases} x = 2 + 6t \\ y = -3 + 2t \end{cases}$       b)  $S = 5$

- 46 Cho đường thẳng  $d_m: (m-2)x + (m-1)y + 2m - 1 = 0$ .  
 a) Chứng minh rằng  $d_m$  luôn đi qua một điểm cố định A.  
 b) Tìm m để  $d_m$  cắt đoạn BC với B(2; 3), C(4; 0).  
 c) Tìm phương trình đường thẳng đi qua A và tạo với BC một góc  $45^\circ$ .  
 d) Tìm m để đường thẳng  $d_m$  tiếp xúc với đường tròn tâm O bán kính  $R = \sqrt{5}$ .

HD: a) A(1; -3)      b)  $\frac{8}{7} \leq m \leq \frac{3}{2}$       c)  $x + 5y + 14 = 0$ ,  $5x - y - 8 = 0$

d)  $m = 3$ ,  $m = \frac{4}{3}$

- 47 Cho hai đường thẳng:

$d: x \cos t + y \sin t - 3 \cos t - 2 \sin t = 0$  và  $d': x \sin t - y \cos t + 4 \cos t + \sin t = 0$

- a) Chứng minh rằng d và d' lần lượt đi qua 2 điểm cố định A, A' và  $d \perp d'$ .

b) Tìm phương trình tập hợp giao điểm M của  $d$  và  $d'$ . Viết phương trình tiếp tuyến của tập hợp đó vẽ từ điểm B(5; 0).

HD: a) A(3; 2), A'(-1; 4)    b) (C):  $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 5$ ;  $2x+11y-10=0$ ;  $2x+y-10=0$

48 Cho ba điểm M(6; 1), N(7; 3), P(3; 5) lần lượt là trung điểm của ba cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC.

- a) Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C.  
 b) Tìm phương trình các trung tuyến AM, BN, CP.  
 c) Tính diện tích của tam giác ABC.

HD: a) A(4; 7), B(2; 3), C(10; -1)

b)  $3x+y-19=0$ ,  $y=3$ ,  $6x+7y-53=0$     c)  $S=20$

49 Cho tam giác ABC có A(8; 0), B(0; 6), C(9; 3). Gọi H là chân đường cao vẽ từ C xuống cạnh AB.

- a) Tìm phương trình cạnh AB và đường cao CH.  
 b) Gọi I, K lần lượt là hình chiếu của C trên Ox và Oy. Chứng minh I, H, K thẳng hàng.

50 Cho ba điểm A(0; -1), B(4; 1), C(4; 2). Viết phương trình đường thẳng  $d$  khi biết:

- a)  $d$  đi qua A và khoảng cách từ B đến  $d$  bằng hai lần khoảng cách từ C đến  $d$ .  
 b)  $d$  đi qua C và cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại E và F sao cho:  $\overline{OE} + \overline{OF} = -3$ .  
 c)  $d$  đi qua B, cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại M, N với  $x_M > 0$ ,  $y_N > 0$  và sao cho:

- i)  $OM + ON$  nhỏ nhất    ii)  $\frac{1}{OM^2} + \frac{1}{ON^2}$  nhỏ nhất.

HD: a)  $x-y-1=0$ ,  $2x-3y-3=0$     b)  $2x-y-6=0$ ,  $x-4y+4=0$

c) i)  $x+2y-6=0$     ii)  $4x+y-17=0$

51 Viết phương trình các cạnh của tam giác ABC, biết:

- a) Đỉnh B(2; 6), phương trình một đường cao và một phân giác vẽ từ một đỉnh là:  
 $x-7y+15=0$ ,  $7x+y+5=0$   
 b) Đỉnh A(3; -1), phương trình một phân giác và một trung tuyến vẽ từ hai đỉnh khác nhau là:  
 $x-4y+10=0$ ,  $6x+10y-59=0$ .

HD: a)  $4x-3y+10=0$ ,  $7x+y-20=0$ ,  $3x+4y-5=0$

b)  $2x+9y-65=0$ ,  $6x-7y-25=0$ ,  $18x+13y-41=0$

52 Cho hai điểm A(3; 4), B(-1; -4) và đường thẳng  $d: 3x+2y-7=0$ .

- a) Viết phương trình đường tròn (C) qua A, B và có tâm  $I \in d$ .  
 b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) kẻ từ điểm  $E\left(\frac{1}{2}; 4\right)$ . Tính độ dài của tiếp tuyến đó và tìm tọa độ tiếp điểm.  
 c) Trên (C), lấy điểm F có  $x_F = 8$ . Viết phương trình đường tròn (C') đối xứng với (C) qua đường thẳng AF.

HD: a)  $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 15 = 0$

b)  $y-4=0$ ,  $4x-3y+10=0$ ,  $d = 5/2$ , tiếp điểm (3; 4), (-1; 2)

c) (C'):  $x^2 + y^2 - 16x - 8y + 55 = 0$

- 53 Cho đường cong  $(C_m): x^2 + y^2 + mx - 4y - m + 2 = 0$ .
- Chứng minh rằng với mọi  $m$ ,  $(C_m)$  luôn là đường tròn và  $(C_m)$  luôn đi qua 2 điểm cố định A, B.
  - Tìm  $m$  để  $(C_m)$  đi qua gốc tọa độ O. Gọi  $(C)$  là đường tròn ứng với giá trị  $m$  vừa tìm được. Viết phương trình đường thẳng  $\Delta$  song song với đường thẳng  $d: 4x + 3y - 5 = 0$  và chắn trên  $(C)$  một dây cung có độ dài bằng 4.
  - Viết phương trình tiếp tuyến của  $(C)$  có vectơ chỉ phương là  $\vec{a} = (-2; 1)$ .
  - Tìm  $m$  để  $(C_m)$  tiếp xúc với trục tung. Viết phương trình đường tròn ứng với  $m$  đó.
- HD: a)  $A(1; 1), B(1; 3)$

b)  $m = 2, (C): x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0, \Delta_1: 4x + 3y - 8 = 0, \Delta_2: 4x + 3y + 7 = 0$

c)  $x + 2y - 8 = 0, x + 2y + 2 = 0$       d)  $m = -2, x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$

- 54 Cho đường cong  $(C_t): x^2 + y^2 - 2x \cos t - 2y \sin t + \cos 2t = 0$  ( $0 < t < \pi$ ).
- Chứng tỏ  $(C_t)$  là đường tròn với mọi  $t$ .
  - Tìm tập hợp tâm I của  $(C_t)$  khi  $t$  thay đổi.
  - Gọi  $(C)$  là đường tròn trong họ  $(C_t)$  có bán kính lớn nhất. Viết phương trình của  $(C)$ .
  - Viết phương trình tiếp tuyến của  $(C)$  tạo với trục Ox một góc  $45^\circ$ .

HD: b)  $x^2 + y^2 = 1$       c)  $t = \frac{\pi}{2}, (C): x^2 + y^2 - 2y - 1 = 0$

d)  $x - y - 1 = 0, x + y + 1 = 0, x - y + 3 = 0, x + y - 3 = 0$

- 55 Cho hai đường thẳng  $d_1: x - 3y + 4 = 0, d_2: 3x + y + 2 = 0$ .
- Viết phương trình hai đường tròn  $(C_1), (C_2)$  qua gốc tọa độ O và tiếp xúc với  $d_1, d_2$ . Xác định tâm và bán kính của 2 đường tròn đó. Gọi  $(C_1)$  là đường tròn có bán kính lớn hơn.
  - Gọi A và B là tiếp điểm của  $(C_1)$  với  $d_1$  và  $d_2$ . Tính tọa độ của A và B. Tính góc AOB.
  - Viết phương trình đường thẳng  $\Delta$  cắt  $(C_1)$  tạo ra 1 dây cung nhận điểm E(4; -2) làm trung điểm.
  - Trên đường thẳng  $d_3: 3x + y - 18 = 0$ , tìm những điểm mà từ đó vẽ được 2 tiếp tuyến của  $(C_1)$  vuông góc với nhau.

HD: a)  $(C_1): x^2 + y^2 - 6x + 2y = 0, (C_2): 5x^2 + 5y^2 + 2x - 6y = 0$

b)  $A(2; 2), B(0; -2), AOB = 135^\circ$       c)  $\Delta: x - y - 6 = 0$       d)  $(5; 3), (7; -3)$