

BÀI TẬP NÂNG CAO TOÁN 8

NHÂN CÁC ĐA THỨC

1. Tính giá trị:

$$B = x^{15} - 8x^{14} + 8x^{13} - 8x^{12} + \dots - 8x^2 + 8x - 5 \text{ với } x = 7$$

2. Cho ba số tự nhiên liên tiếp. Tích của hai số đầu nhỏ hơn tích của hai số sau là 50. Hỏi đã cho ba số nào ?

3. Chứng minh rằng nếu: $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ thì

$$(x^2 + y^2 + z^2)(a^2 + b^2 + c^2) = (ax + by + cz)^2$$

CÁC HẰNG ĐẲNG THỨC ĐÁNG NHỚ

1. Rút gọn các biểu thức sau:

a. $A = 100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \dots + 2^2 - 1^2$

b. $B = 3(2^2 + 1)(2^4 + 1) \dots (2^{64} + 1) + 1$

c. $C = (a + b + c)^2 + (a + b - c)^2 - 2(a + b)^2$

2. Chứng minh rằng:

a. $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$

b. $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

Suy ra các kết quả:

i. Nếu $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ thì $a + b + c = 0$ hoặc $a = b = c$

ii. Cho $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$, tính $A = \frac{bc}{a^2} + \frac{ca}{b^2} + \frac{ab}{c^2}$

iii. Cho $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ ($abc \neq 0$)

tính $B = \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right) \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c} \right)$

3. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức

a. $A = 4x^2 + 4x + 11$

b. $B = (x - 1)(x + 2)(x + 3)(x + 6)$

c. $C = x^2 - 2x + y^2 - 4y + 7$

4. Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức

a. $A = 5 - 8x - x^2$

b. $B = 5 - x^2 + 2x - 4y^2 - 4y$

5. a. Cho $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$ chứng minh rằng $a = b = c$

b. Tìm a, b, c biết $a^2 - 2a + b^2 + 4b + 4c^2 - 4c + 6 = 0$

6. Chứng minh rằng:

a. $x^2 + xy + y^2 + 1 > 0$ với mọi x, y

b. $x^2 + 4y^2 + z^2 - 2x - 6z + 8y + 15 > 0$ với mọi x, y, z

7. Chứng minh rằng:

$x^2 + 5y^2 + 2x - 4xy - 10y + 14 > 0$ với mọi x, y .

8. Tổng ba số bằng 9, tổng bình phương của chúng bằng 53. Tính tổng các tích của hai số trong ba số ấy.

9. Chứng minh tổng các lập phương của ba số nguyên liên tiếp thì chia hết cho 9.

10. Rút gọn biểu thức:

$A = (3 + 1)(3^2 + 1)(3^4 + 1) \dots (3^{64} + 1)$

11. a. Chứng minh rằng nếu mỗi số trong hai số nguyên là tổng các bình phương của hai số nguyên nào đó thì tích của chúng có thể viết dưới dạng tổng hai bình phương.

b. Chứng minh rằng tổng các bình phương của k số nguyên liên tiếp ($k = 3, 4, 5$) không là số chính phương.

PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ

1. Phân tích đa thức thành nhân tử:

a. $x^2 - x - 6$

b. $x^4 + 4x^2 - 5$

c. $x^3 - 19x - 30$

2. Phân tích thành nhân tử:

- a. $A = ab(a - b) + b(b - c) + ca(c - a)$
 - b. $B = a(b^2 - c^2) + b(c^2 - a^2) + c(a^2 - b^2)$
 - c. $C = (a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$
3. Phân tích thành nhân tử:
- a. $(1 + x^2)^2 - 4x(1 - x^2)$
 - b. $(x^2 - 8)^2 + 36$
 - c. $81x^4 + 4$
 - d. $x^5 + x + 1$
4. a. Chứng minh rằng: $n^5 - 5n^3 + 4n$ chia hết cho 120 với mọi số nguyên n .
 b. Chứng minh rằng: $n^3 - 3n^2 - n + 3$ chia hết cho 48 với mọi số lẻ n .
5. Phân tích các đa thức sau đây thành nhân tử
1. $a^3 - 7a - 6$
 2. $a^3 + 4a^2 - 7a - 10$
 3. $a(b + c)^2 + b(c + a)^2 + c(a + b)^2 - 4abc$
 4. $(a^2 + a)^2 + 4(a^2 + a) - 12$
 5. $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) - 12$
 6. $x^8 + x + 1$
 7. $x^{10} + x^5 + 1$
6. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên lẻ n :
1. $n^2 + 4n + 8 \equiv 8 \pmod{8}$
 2. $n^3 + 3n^2 - n - 3 \equiv 48 \pmod{48}$
7. Tìm tất cả các số tự nhiên n để :
1. $n^4 + 4$ là số nguyên tố
 2. $n^{1994} + n^{1993} + 1$ là số nguyên tố
8. Tìm nghiệm nguyên của phương trình :
1. $x + y = xy$
 2. $p(x + y) = xy$ với p nguyên tố
 3. $5xy - 2y^2 - 2x^2 + 2 = 0$

1. Xác định a để cho đa thức $x^3 - 3x + a$ chia hết cho $(x - 1)^2$
2. Tìm các giá trị nguyên của n để $\frac{2n^2 + 3n + 3}{2n - 1}$ là số nguyên
3. Tìm dư trong phép chia đa thức:

$$f(x) = x^{1994} + x^{1993} + 1 \text{ cho:}$$

- a. $x - 1$
 - b. $x^2 - 1$
 - c. $x^2 + x + 1$
4. 1. Xác định các số a và b sao cho:
 - a. $x^4 + ax^2 + b$ chia hết cho:
 - i. $x^2 - 3x + 2$
 - ii. $x^2 + x + 1$
 - b. $x^4 - x^3 - 3x^2 + ax + b$ chia cho $x^2 - x - 2$ có dư là $2x - 3$
 - c. $2x^2 + ax + b$ chia cho $x + 1$ dư - 6 chia cho $x - 2$ dư 21

2. Chứng minh rằng

$$f(x) = (x^2 - x + 1)^{1994} + (x^2 + x - 1)^{1994} - 2$$

chia hết cho $x - 1$. Tìm dư trong phép chia $f(x)$ cho $x^2 - 1$

5. Tìm n nguyên để $\frac{2n^2 + n - 7}{\text{nguyên } n - 2}$ là số

6. Chứng minh rằng:

- a. $11^{10} - 1$ chia hết cho 100
 - b. $9 \cdot 10^n + 18$ chia hết cho 27
 - c. $16^n - 15n - 1$ chia hết cho 255
7. Tìm tất cả các số tự nhiên n để $2^n - 1$ chia hết cho 7
 8. Chứng minh rằng:

- a. $20^n + 16^n - 3^n - 1$ 323 với n chẵn
- b. $11^n + 2 + 12^2n + 1$ 133
- c. $2^{2n} + 77$ và $n > 1$

TÍNH CHẤT CƠ BẢN VÀ RÚT GỌN PHÂN THỨC

1. Xác định x để phân thức: $\frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^3 - 2x^2 + x}$ bằng 0
2. Rút gọn phân thức: $A = \frac{x^4 - 3x^2 + 1}{x^4 - x^2 - 2x - 1}$
3. Cho $4a^2 + b^2 = 5ab$ và $2a > b > 0$
 Tính giá trị biểu thức $P = \frac{ab}{4a^2 - b^2}$
4. Tìm các số nguyên x để $\frac{x^4 - 16}{x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 16x + 16}$ có giá trị nguyên
5. Cho phân thức $A = \frac{xy^2 + y^2(y^2 - x) + 1}{x^2y^4 + 2y^4 + x^2 + 2}$
 - a. Rút gọn A, suy ra $A > 0$
 - b. Xác định x để A có giá trị lớn nhất
6. Tính $\frac{16a^2 - 40ab}{8a^2 - 24ab}$ với $3a = 10b$

CÁC PHÉP TÍNH VỀ PHÂN THỨC

1. Tính các tổng sau:
 - a. $A = \frac{x^4 - (x-1)^2}{(x^2+1)^2 - x^2} + \frac{x^2 - (x^2-1)^2}{x^2(x+1)^2 - 1} + \frac{x^2(x-1)^2 - 1}{x^4 - (x+1)^2}$
 - b. $B = \frac{x}{xy+x+1} + \frac{y}{yz+y+1} + \frac{z}{xz+z+1}$ với $xyz = 1$
2. Cho $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$
 Chứng minh rằng: $\frac{1}{a^{1995}} + \frac{1}{b^{1995}} + \frac{1}{c^{1995}} = \frac{1}{a^{1995} + b^{1995} + c^{1995}}$
3. Cho phân thức

$$A = \frac{x^2 + y^2 - z^2}{2xy} + \frac{y^2 + z^2 - x^2}{2yz} + \frac{z^2 + x^2 - y^2}{2xz} \quad (xyz \neq 0)$$

a. Chứng minh rằng nếu $A = 1$ thì trong ba số x, y, z có một số bằng tổng hai số kia và trong phân thức A có một phân thức bằng -1 còn hai phân thức còn lại bằng 1 .

b. Nếu x, y, z là độ dài các đoạn thẳng và $A > 1$ Chứng minh x, y, z là độ dài các cạnh của một tam giác.

4. Chứng minh rằng nếu a, b, c khác nhau đôi một thì:

$$a. \frac{b-c}{(a-b)(a-c)} + \frac{c-a}{(b-c)(b-a)} + \frac{a-b}{(c-a)(c-b)} = \frac{2}{a-b} + \frac{2}{b-c} + \frac{2}{c-a}$$

$$b. \frac{a}{(b-c)^2} + \frac{b}{(c-a)^2} + \frac{c}{(a-b)^2} = 0 \text{ nếu } \frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} = 0$$

5. Chứng minh rằng nếu:

$$x = by + cz, y = ax + cz, z = ax + by \text{ và } x + y + z \neq 0$$

$$\text{thì } \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = 2$$

6. Cho a, b, c và x, y, z là các số khác nhau và khác không chứng minh rằng

$$\text{nếu: } \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0 \text{ và } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \text{ thì } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

