

## BÀI TẬP HÌNH HỌC NÂNG CAO

### Dạng 1: HÌNH LĂNG TRỤ – HÌNH CHÓP CỤT

Bài 1. Cho lăng trụ  $ABC.A'B'C'$ . Gọi  $M, M'$  là trung điểm  $BC, B'C'$ .

- Chứng minh rằng  $AM // A'M'$
- Tìm giao điểm  $A'M // (AB'C')$
- Tìm giao tuyến  $d$  của  $(AB'CD)$  và  $(BA'C')$
- Tìm giao điểm của  $d$  với  $(AMA')$

Bài 2. Cho lăng trụ  $ABC.A'B'C'$ . Gọi  $H$  là trung điểm  $A'B'$ .

- Chứng minh rằng  $CB' // (AHC')$
- Tìm giao tuyến  $d$  của  $(AB'C')$  và  $(A'BC)$
- Chứng minh rằng  $d // (BB'C'C)$

Bài 3. Cho chóp cụt tam giác  $ABC.A'B'C'$  với  $ABC$  là đáy lớn. Gọi  $S$  là điểm đồng quy của 3 đường thẳng  $AA', BB', CC'$ . Chứng minh rằng  $SA' / SA = SB' / SB = SC' / SC$

### Dạng 2: BÀI TẬP TỔNG HỢP QUAN HỆ SONG SONG

Bài 1. Cho hình chóp  $S.ABCD$  đáy là hình bình hành tâm  $O$ . Gọi  $M, N$  là trung điểm  $SA, CD$

- Chứng minh rằng  $(OMN) // (SBC)$
- Tìm giao điểm  $I$  của  $ON$  và  $(SAB)$
- Gọi  $G = SI \cap BM, H$  là trọng tâm  $\Delta SCD$ . Chứng minh rằng  $GH // (SAD)$
- Gọi  $J$  là trung điểm  $AD, E$  thuộc  $MJ$ . Chứng minh rằng  $OE // (SCD)$

Bài 2. Cho hình chóp  $S.ABCD$  đáy là hình bình hành tâm  $O$ . Gọi  $M, N, P$  là trung điểm  $BC, CD, SC$ .

- Chứng minh rằng  $(MNP) // (SBD)$
- Tìm giao tuyến  $(SAB)$  và  $(SCD)$
- Tìm giao tuyến của  $(MNP)$  và  $(SAD)$ . Suy ra giao điểm của  $SA$  và  $(MNP)$
- Gọi  $I = AP \cap SO, J = AM \cap SO$ . Chứng minh rằng  $IJ // (MNP)$

Bài 3. Cho hình chóp  $S.ABCD$  đáy là hình bình hành. Gọi  $I, J, K$  là trung điểm  $SA, SB, BC$

- Chứng minh rằng  $IJ // (SCD), (IJK) // (SCD)$
- Chứng minh rằng  $(IJK) // SD$
- Tìm giao điểm  $AD$  và  $(IJK)$
- Xác định thiết diện hình chóp và  $(IJK)$

Bài 4. Cho hình chóp  $S.ABCD$  đáy là hình thang ( $AB$  là đáy lớn). Gọi  $M, N$  là trung điểm  $BC, SB; P$  thuộc  $AD$  sao cho  $2PD = PA$ .

- Chứng minh rằng  $MN // (SCD)$ .
- Tìm giao điểm  $SA$  và  $(MNP)$
- Tìm giao điểm  $SO$  và  $(MNP)$  (với  $O = AC \cap BD$ )
- Gọi  $G$  là trọng tâm  $\Delta SAB$ . Chứng minh rằng  $GP // (SBD)$

Bài 5. Cho hình chóp  $S.ABCD$  đáy là hình bình hành tâm  $O$ . Gọi  $Q, E, F, I$  lần lượt là trung điểm  $BC, AD, SD, SB$ .

- Chứng minh rằng  $FO // (SBC)$ .
- Chứng minh rằng  $AI // (QEF)$ .
- Tìm giao điểm  $J$  của  $SC$  và  $(QEF)$ . Chứng minh rằng  $(IJE) // (ABCD)$
- Tìm thiết diện hình chóp và  $(IJE)$ . Thiết diện là hình gì?

Bài 6. Cho hình chóp  $S.ABCD$  đáy là hình bình hành tâm  $O$ . Gọi  $M, N$  là trung điểm  $SB, SC; I$  lấy điểm  $P$  thuộc  $SA$ .

- Tìm giao tuyến của  $(SAB)$  và  $(SCD)$
- Tìm giao điểm  $SD$  và  $(MNP)$
- Tìm thiết diện hình chóp và  $(MNP)$ . Thiết diện là hình gì?
- Gọi  $J$  thuộc  $MN$ . Chứng minh rằng  $OJ // (SAD)$

### Dạng 3: VECTOR TRONG KHÔNG GIAN

Bài 1. Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $I, J$  lần lượt là trung điểm  $AD, BC$ . Gọi  $G$  là trọng tâm tam giác  $BCD$ . Chứng minh rằng  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{IJ}$

Bài 2. Cho tứ diện ABCD. Gọi E là trọng tâm của  $\Delta BCD$ ; G là điểm thỏa  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ . Chứng minh A, G, E thẳng hàng. Tính GE/GA.

Bài 3. Cho hai tứ diện ABCD và  $A'B'C'D'$ . Chứng minh rằng hai tứ diện có cùng trọng tâm khi và chỉ khi  $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{DD'} = \vec{0}$

Bài 4. Cho tứ diện ABCD; lần lượt lấy M, N thuộc các đoạn AB, CD sao cho:  $MA = 2MB$  và  $ND = 2NC$ . Các điểm I, J, P lần lượt thuộc các đoạn AD, MN, BC sao cho  $IA/ID = JM/JN = PB/PC = k$ . Chứng minh ba điểm I, J, P thẳng hàng.

Bài 5. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Chứng minh rằng  $\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{D'D} = \overrightarrow{AC}$

Bài 6. Cho lăng trụ ABC. A'B'C'. Đặt  $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}$ . Gọi G' là trọng tâm A'B'C'. Hãy phân tích  $\overrightarrow{AG'}$  theo  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

Bài 7. Cho hình chóp SABC. Lấy M thuộc SA, N thuộc BC sao cho  $\overrightarrow{MB} = -2\overrightarrow{MA}, 2\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{CN}$ . Chứng minh rằng  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{SC}$  đồng phẳng.

Bài 8. Cho hình hộp ABCD. A'B'C'D'. Gọi K là giao điểm AD' và DA'. I là giao điểm BD' và DB'. Chứng minh  $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{KI}, \overrightarrow{B'C'}$  đồng phẳng.

Bài 9. Cho tứ diện ABCD. Lấy M thuộc AD, N thuộc BC sao cho:  $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{MD}, \overrightarrow{NB} = -3\overrightarrow{NC}$ . Chứng minh rằng  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{MN}$  đồng phẳng.

Bài 10. Cho lăng trụ ABC. A'B'C'. Gọi I, J lần lượt là trung điểm BB', A'C'; lấy K thuộc đoạn B'C' sao cho:  $KC' = 2KB'$ . Chứng minh bốn điểm A, I, J, K đồng phẳng.

#### Dạng 4: ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC MẶT PHẪNG

Bài 1. Cho hình chóp S.ABC đáy là ABC vuông cân tại B, SA vuông góc với (ABC)

- Chứng minh rằng các mặt bên của hình chóp là các tam giác vuông
- Kẻ đường cao AD của SAB và đường cao AE của SAC. Chứng minh  $\Delta ADE$  vuông và SC vuông góc với DE.

Bài 2. Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình vuông, SA vuông góc với (ABCD).

- Chứng minh rằng BC vuông góc với (SAB); CD vuông góc với (SAD)
- Chứng minh rằng BD vuông góc với (SAC)
- Kẻ AE vuông góc với SB. Chứng minh rằng SB vuông góc với (ADE)

Bài 3. Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình vuông,  $SA = SB = SC = SD$ .

- Chứng minh rằng SO vuông góc với (ABCD), BD vuông góc với (SAC)
- Gọi I là trung điểm AB. Chứng minh rằng AB vuông góc với (SOI)
- Kẻ đường cao OJ của SOI. Chứng minh rằng SA vuông góc với OJ

Bài 4. Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình vuông tâm O cạnh a. SA vuông góc với (ABCD) và  $SA = a\sqrt{3}$

- Chứng minh  $\Delta SBC, \Delta SCD$  là các tam giác vuông
- Tính góc giữa SD và (ABCD); SC và (SAD)
- Vẽ AH vuông góc với SB, AK vuông góc với SD. Chứng minh rằng AH vuông góc với (SBC); SC vuông góc với (AHK)
- Chứng minh rằng BD vuông góc với (SAC). Tính góc giữa SD và (SAC).

Bài 5. Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình thoi tâm O. Hai tam giác SAB và SAC vuông ở A, cho  $SA = a, AC = 2a\sqrt{3}$

- Chứng minh rằng SA vuông góc với (ABCD)
- Chứng minh rằng BD vuông góc với SC
- Vẽ AH là đường cao của SAO. Chứng minh rằng AH vuông góc với (SBD)
- Tính góc giữa AO và (SBD).

Bài 6. Cho hình chóp S.ABCD đáy ABCD là hình vuông tâm O, SO vuông góc với (ABCD),  $SO = a\sqrt{3}, AB = a\sqrt{2}$ .

- Chứng minh rằng BD vuông góc với SA; AC vuông góc với SB
- Vẽ CI vuông góc với SD, OJ vuông góc với SC. Chứng minh rằng SD vuông góc với (ACI); SC vuông góc với (BDJ)
- Gọi K là trung điểm SB. Chứng minh rằng OK vuông góc với OI.
- Tính góc giữa SA và (ABCD)

#### Dạng 5: HAI MẶT PHẪNG VUÔNG GÓC

Bài 1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông, SA vuông góc với mặt phẳng đáy.

- Chứng minh rằng (SAC) vuông góc với (SBD)
- Gọi BE, DF là đường cao  $\Delta$ SBD. Chứng minh (AEF) vuông góc với (SAC)

Bài 2. Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình vuông tâm O cạnh a, SA = a, SA vuông góc với (ABCD)

- Chứng minh các cặp mặt phẳng sau vuông góc nhau: (SAB) và (SAD); (SBC) và (SAB); (SCD) và (SAD)
- Gọi AI, AJ là đường cao SAB, SAC. Chứng minh rằng (SCD) vuông góc với (AIJ)
- Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) & (ABCD), (SBD) & (ABCD)

Bài 3. Cho tứ diện ABCD, AD vuông góc với (ABC), DE là đường cao của  $\Delta$ BCD

- Chứng minh rằng (ABC) vuông góc với (ADE)
- Vẽ đường cao BF và đường cao BK của  $\Delta$ ABC và  $\Delta$ BCD. Chứng minh rằng (BFK) vuông góc với (BCD)
- Gọi I, K lần lượt là trực tâm của  $\Delta$ ABC,  $\Delta$ BCD. Chứng minh rằng IK vuông góc với (BCD).

Bài 4. Cho hình vuông ABCD cạnh a. Gọi I, J là trung điểm AB, CD. Trên đường thẳng vuông góc (ABCD) tại I lấy S.

- Chứng minh rằng BC vuông góc với (SAB), CD vuông góc với (SIJ), (SAB) vuông góc với (SIJ)
- Gọi M là trung điểm BC. Chứng minh rằng (SIM) vuông góc với (SBD)
- Cho SI = a. Tính góc giữa (SCD) và (ABCD)

Bài 5. Cho hình chóp đều S.ABCD, O là tâm ABCD. Gọi I là trung điểm AB, cho SA = a, AB = a.

- Chứng minh rằng (SAC) vuông góc với (SBD), (SIO) vuông góc với (SCD).
- Gọi OJ là đường cao SOI. Chứng minh rằng OJ vuông góc với SB
- Gọi BK là đường cao SBC. Chứng minh rằng (SCD) vuông góc với (BDK)
- Tính góc giữa mặt bên và mặt đáy.

Bài 6. Cho hình chóp S.ABCD đáy ABCD là hình chữ nhật, (SAB) vuông góc với (ABCD). Cho AB = a, AD =  $a\sqrt{2}$ .

- Chứng minh rằng SA vuông góc với (ABCD), (SAD) vuông góc với (SCD)
- Gọi AH là đường cao tam giác SAB. Chứng minh AH vuông góc với (SBC), (SBC) vuông góc với (AHC)
- Chứng minh rằng DH vuông góc với SB
- Tính góc giữa (SAC) và (SAD)

Bài 7. Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình vuông cạnh a tâm O. Cho (SAB) vuông góc với (ABCD), (SAD) vuông góc với (ABCD).

- Chứng minh rằng SA vuông góc với (ABCD), BD vuông góc với (SAC)
- Gọi AH, AK là đường cao. Chứng minh rằng AH vuông góc với BD, AK vuông góc với (SCD)
- Chứng minh rằng (SAC) vuông góc với (AHK)
- Tính góc giữa (SAC) và (SCD) (biết SA = a)

Bài 8. Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình vuông cạnh a tâm O. SA vuông góc với (ABCD), SA = a.

- Chứng minh các mặt bên hình chóp đều là tam giác vuông
- Chứng minh rằng BD vuông góc với SC
- Tính góc giữa SC & (ABCD); (SBD) & (ABCD)
- Tính góc giữa (SCD) & (ABCD). Tính diện tích hình chiếu của  $\Delta$ SCD trên (ABCD)

### Dạng 6: KHOẢNG CÁCH

Bài 1. Cho tứ diện SABC,  $\Delta$ ABC vuông cân tại B, AC = SA = 2a và SA vuông góc với (ABC)

- Chứng minh rằng (SAB) vuông góc với (SBC)
- Tính d(A, (SBC))
- Gọi O là trung điểm AC. Tính d(O, (SBC))

Bài 2. Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình vuông cạnh a tâm O. SA vuông góc với (ABCD) và SA = 2a; dựng BK vuông góc với SC.

- Chứng minh rằng SC vuông góc với (DBK)
- Tính d(A, (SBC)); d(A, (SDC)); d(O, (SBC))
- Tính d(BD, SC); d(AD, BK)

Bài 3. Cho hình chóp S.ABCD đều, O là tâm hình vuông ABCD, cạnh bên bằng 2a, cạnh đáy bằng a. Gọi I, J là trung điểm AB, CD.

- Chứng minh rằng (SIJ) vuông góc với (SAB)
- Tính d(O, (SCD)); d(I, (SCD))
- Tính d(SC, BD); d(AB, SD)

Bài 4. Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình thoi tâm O cạnh a, góc A =  $60^\circ$ , đường cao SO = a.

a. Tính  $d(O, (SBC))$

b. Tính  $d(AD, SB)$

**Dạng 7: DIỆN TÍCH – HÌNH CHIẾU**

Bài 1. Cho tam giác ABC đều cạnh a, nằm trong mặt phẳng  $(\alpha)$ . Trên đường vuông góc với  $(\alpha)$  tại B, C. Vẽ  $BD = a\sqrt{2} / 2$ ,  $CE = a\sqrt{2}$  nằm cùng phía với mặt phẳng  $(\alpha)$ .

a. Chứng minh rằng tam giác ADE vuông.

b. Tính diện tích tam giác ADE.

c. Tìm góc giữa (ADE) và  $(\alpha)$ .

Bài 2. Cho tam giác ABC có B, C là hình chiếu của E, F lên  $(\alpha)$  sao cho tam giác ABF là tam giác đều cạnh a,  $CF = a$ ,  $BE = a/2$ .

a. Gọi  $I = BC \cap EF$ . Chứng minh rằng AI vuông góc với AC

b. Tính diện tích tam giác ABC.

c. Tính góc giữa (ABC) và mặt phẳng  $(\alpha)$ .

Bài 3. Cho tam giác ABC cân, đáy  $BC = 3a$ , BC vuông góc với  $(\alpha)$ , đường cao  $a\sqrt{3}$ . D là hình chiếu của A lên  $(\alpha)$  sao cho tam giác DBC vuông tại D. Tìm góc giữa (ABC) và  $(\alpha)$ .

Bài 4. Cho tam giác ABC đều cạnh a. Từ các đỉnh A, B, C vẽ các nửa đường thẳng vuông góc với mặt phẳng chứa ABC. Lấy D, E, F nằm cùng phía đối với mặt phẳng chứa ABC sao cho  $AD = a$ ,  $BE = 2a$ ,  $CF = x$ .

a. Tìm x để tam giác DEF vuông tại D.

b. Với x vừa tìm được ở câu trên, tìm góc giữa (ABC) và (DEF).