

## BÀI TẬP HÌNH HỌC NÂNG CAO

### Dạng 1: TÌM GIAO TUYẾN CỦA HAI MẶT PHẪNG

Bài 1. Cho hình chóp S.ABCD. Đáy có các cặp cạnh đối không song song. Tìm giao tuyến của

- a. (SAC) và (SBD)                      b. (SAB) và (SCD)                      c. (SAD) và (SBC)

Bài 2. Cho tứ diện ABCD có I, J lần lượt là trung điểm AC, BC; K thuộc BD sao cho  $KD < KB$ . Tìm giao tuyến của

- a. (IJK) và (ACD)                      b. (IJK) và (ABD)

Bài 3. Cho chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành. Gọi M, N là trung điểm SB, SD; P thuộc SC sao cho  $PC < PS$ . Tìm giao tuyến của

- a. (SAC) và (SBD)                      b. (MNP) và (SBD)                      c. (MNP) và (SAC)  
d. (MNP) và (SAB)                      e. (MNP) và (SAD)                      f. (MNP) và (ABCD)

Bài 4. Cho chóp S.ABCD có đáy là hình thang, AD là đáy lớn. Gọi M, N là trung điểm BC, CD. Tìm giao tuyến của

- a. (SAC) và (SBD)                      b. (SMN) và (SAD)                      c. (SAB) và (SCD)  
d. (SMN) và (SAC)                      e. (SMN) và (SAB)

Bài 5. Cho chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành. Gọi I, J, K là trung điểm của BC, CD, SA. Tìm giao tuyến của

- a. (IJK) và (SAB)                      b. (IJK) và (SAD)                      c. (IJK) và (SBC)  
d. (IJK) và (SBD)

Bài 6. Cho tứ diện ABCD có M, N, P lần lượt nằm trên cạnh AB, AC, BD sao cho MN, BC, MP, AD. Tìm giao tuyến 2 mặt phẳng

- a. (MNP) và (ABC)                      b. (MNP) và (BCD)                      c. (MNP) và (ACD)

Bài 7. Cho chóp S.ABCD đáy là hình thang đáy lớn AD. Gọi I là trung điểm SA, J thuộc AD sao cho  $JD = AD/4$ ; K thuộc SB sao cho  $SK = 2BK$ . Tìm giao tuyến

- a. (IJK) và (ABCD)                      b. (IJK) và (SBD)                      c. (IJK) và (SBC)

Bài 8. Cho chóp S.ABCD có đáy hình bình hành tâm O. Lấy N, M lần lượt thuộc SA, SB sao cho  $BM = BS/4$ ;  $SN = (3/4)SA$ . Tìm giao tuyến

- a. (OMN) và (SAB)                      b. (OMN) và (SAD)                      c. (OMN) và (SBC)  
d. (OMN) và (SCD)

### Dạng 2: TÌM GIAO ĐIỂM CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG

Bài 1. Cho tứ diện ABCD có M, N lần lượt là trung điểm AC, BC. Điểm K thuộc BD:  $KD < KB$ . Tìm giao điểm của:

- a. CD và (MNK)                      b. AD và (MNK)

Bài 2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang  $AD // BC$ . M, N là 2 điểm bất kỳ trên SB, SD. Tìm giao điểm:

- a. SA và (MCD)                      b. MN và (SAC)                      c. SA và (MNC)

Bài 3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành và M là trung điểm SC.

- a. Tìm giao điểm I của AM và (SBD).  
b. Tìm giao điểm J của SD và (ABM).  
c. Gọi M thuộc AB. Tìm giao điểm của MN và (SBD).

Bài 4. Cho tứ diện ABCD có M, N lần lượt là trung điểm AB, BC; P thuộc BD sao cho  $PB = 2PD$ . Tìm giao điểm của

- a. AC và (MNP)                      b. BD và (MNP)

Bài 5. Cho chóp S.ABCD có đáy  $AB > CD$ . Gọi M thuộc SA, N thuộc AB, P thuộc BC. Tìm giao điểm

- a. MP và (SBD)                      b. SD và (MNP)                      c. SC và (MNP)

Bài 6. Cho chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N là trung điểm SB, AD và G là trọng tâm  $\Delta SAD$ .

- a. Tìm giao điểm I của GM và (ABCD)  
b. Tìm giao điểm J của AD và (OMG)  
c. Tìm giao điểm K của SA và (OGM)

Bài 7. Cho hình chóp S.ABCD có M, N lần lượt là trung điểm của SA, AC; P thuộc AB sao cho  $2PB = AB$ , N thuộc SC sao cho  $SC = 3SN$ . Tìm giao điểm

- a. SI và (MNP)      b. AC và (MNP)      c. SB và (MNP)      d. BC và (MNP)

Bài 8. Cho chóp S.ABCD. Đáy có các cặp cạnh đối không song song và I thuộc SA. Tìm giao điểm

- a. SD và (IBC) b. IC và (SBD)      c. SB và (ICD)

Bài 9. Cho tứ diện ABCD có M thuộc AC, N thuộc AD và P nằm bên trong  $\Delta BCD$ . Tìm giao điểm

- a. CD và (ABP)      b. MN và (ABP)      c. AP và (BMN)

Bài 10. Cho chóp S.ABCD có đáy là hình thang,  $AB \parallel CD$ ,  $AB > CD$ . Lấy I, J, K nằm trên SA, CD, BC.

- a. Tìm giao tuyến (IJK) và (SAB)      b. Tìm giao tuyến (IJK) và (SAC)  
c. Tìm giao tuyến (IJK) và (SAD)      d. Tìm giao điểm của SB và (IJK)  
e. Tìm giao điểm của IC và (SJK)

Bài 11. Cho chóp S.ABCD có đáy là hình thang, đáy lớn AB. Lấy K thuộc đoạn BC, I trung điểm SA, J thuộc đoạn AB.

- a. Tìm giao điểm của KI và (SBD)  
b. Tìm giao tuyến của (IJK) và (SCD)

**Dạng 3: BA ĐIỂM THẲNG HÀNG, BA ĐƯỜNG THẲNG ĐỒNG QUY**

Bài 1. Cho chóp S.ABC có D, E, F lần lượt trên SA, SB, SC sao cho  $DE \cap AB = I$ ,  $EF \cap BC = J$ ,  $FD \cap AC = K$ .

- a. Tìm giao tuyến (ABC) và (DEF)  
b. Chứng minh rằng I, J, K thẳng hàng

Bài 2. Cho chóp S.ABCD có AD không song song với BC, M thuộc SB, O là giao điểm của AC và BD

- a. Tìm giao điểm N của SC và (ADM)  
b. DM cắt AN tại I. Chứng minh rằng S, I, O thẳng hàng

Bài 3. Cho chóp S.ABCD có AB không song song với CD, M trung điểm SC.

- a. Tìm giao điểm N của SD và (ABM)  
b.  $O = AC \cap BD$ . Chứng minh rằng SO, AM, BN đồng quy

Bài 4. Cho chóp S.ABCD có  $AB \cap CD = E$  và I, J là trung điểm SA, SB; lấy N tùy ý trên SD.

- a. Tìm giao điểm M của SC và (IJN)  
b. Chứng minh rằng IJ, MN, SE đồng quy

**Dạng 4: THIẾT DIỆN**

Bài 1. Cho chóp S.ABCD, BC, AD, M trung điểm SA. Tìm thiết diện của chóp và (BCM)

Bài 2. Cho tứ diện ABCD có M, N lần lượt là trung điểm AB, CD; P thuộc AD và không là trung điểm AD. Tìm thiết diện của chóp và (MNP)

Bài 3. Cho chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N là trung điểm AD, CD; I là điểm trên SO. Tìm thiết diện hình chóp với mặt phẳng (MNI).

Bài 4. Cho chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành. Gọi I, J, K là trung điểm BC, CD, SA. Tìm thiết diện của hình chóp và (IJK)

**Dạng 5: TỔNG HỢP GIAO TUYẾN, GIAO ĐIỂM VÀ THIẾT DIỆN**

Bài 1. Cho chóp S.ABCD đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm SB, SD, OC.

- a. Tìm giao tuyến (MNP) và (SAC)  
b. Tìm giao điểm SA và (MNP)  
c. Xác định thiết diện của chóp và (MNP)

Bài 2. Cho chóp S.ABCD, M thuộc SC; N, P trung điểm AB, AD.

- a. Tìm giao điểm của CD và (MNP)  
b. Tìm giao điểm của SD và (MNP)  
c. Tìm giao tuyến của (SBC) và (MNP)  
d. Tìm thiết diện của chóp và (MNP)

Bài 3. Cho chóp S.ABCD có I, J là hai điểm trên AD và SB.

- a. Tìm giao tuyến của (SAC) và (SBD); (SAC) và (SBI)  
b. Tìm giao điểm K của IJ và (SAC)  
c. Tìm giao điểm L của DJ và (SAC)  
d. Chứng minh rằng A, K, L thẳng hàng

Bài 4. Cho chóp S.ABCD có AD không song song với BC. I thuộc SA:  $SA = 3 IA$ , J thuộc SC; M là trung điểm SB.

- Tìm giao tuyến của (SAD) và (SBC)
- Tìm giao điểm E của AB và (IJM)
- Tìm giao điểm F của BC và (IJM)
- Tìm giao điểm N của SD và (IJM)
- Gọi  $H = MN \cap BD$ . Chứng minh rằng H, E, F thẳng hàng

Bài 5. Cho chóp S.ABCD đáy hình thang, AB là đáy lớn. I, J trung điểm SA, SB; M thuộc SD.

- Tìm giao tuyến (SAD) và (SBC)
- Tìm giao điểm K của IM và (SBC)
- Tìm giao điểm N của SC và (IJM)
- Tìm thiết diện của chóp và (IJM)

**Dạng 6: HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VÀ CHÉO NHAU**

Bài 1. Cho tứ diện ABCD có I, J là trọng tâm  $\triangle ABC$ ,  $\triangle ABD$ . Chứng minh rằng  $IJ \parallel CD$

Bài 2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy hình thang đáy lớn AB. Gọi M, N lần lượt là trung điểm SA, SB.

- Chứng minh rằng  $MN \parallel CD$
- Tìm giao điểm P của SC và (AND)
- AN cắt DP tại I. Chứng minh rằng  $SI \parallel AB \parallel CD$ . Tứ giác SABI là hình gì?

Bài 3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành, có M, N, P, Q lần lượt nằm trên BC, SC, SD, AD sao cho  $MN \parallel SB$ ,  $NP \parallel CD$ ,  $MQ \parallel CD$ .

- Chứng minh rằng  $PQ \parallel SA$
- Gọi K là giao điểm MN và PQ. Chứng minh rằng  $SK \parallel AD \parallel BC$

Bài 4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm BC, CD, SB, SD.

- Chứng minh rằng  $MN \parallel PQ$
- Gọi I là trọng tâm  $\triangle ABC$ , J thuộc SA sao cho  $JS / JA = 1/2$ . Chứng minh  $IJ \parallel SM$

Bài 5. Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình bình hành.

- Tìm giao tuyến của (SAD)&(SBC); (SAB)&(SCD)
- Lấy M thuộc SC. Tìm giao điểm N của SD và (ABM). Tứ giác ABMN là hình gì?

Bài 6. Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình bình hành. Gọi M, H, K lần lượt là trung điểm AD, SA, SB.

- Tìm giao tuyến d của (SAD) và (SBC)
- Tìm giao tuyến của (SCD) và (MHK)
- Tìm giao điểm N của BC và mặt phẳng (MHK). Tứ giác MHKN là hình gì?

Bài 7. Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình thang (AB đáy lớn). Gọi I, J, K là trung điểm AD, BC, SB.

- Tìm giao tuyến (SAB) và (SCD); (SCD) và (IJK)
- Tìm giao điểm M của SD và (IJK)
- Tìm giao điểm N của SA và (IJK)
- Xác định thiết diện của hình chóp và (IJK). Thiết diện là hình gì?

Bài 8. Cho hình chóp S.ABCD, đáy là hình bình hành. Gọi M, N, P là trung điểm SB, BC, SD

- Tìm giao tuyến của (SCD) và (MNP).
- Tìm giao điểm của CD và (MNP)
- Tìm giao điểm của AB và (MNP)
- Tìm giao tuyến của (SAC) và (MNP), suy ra thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MNP).

Bài 9. Cho hình chóp S.ABCD,  $AD \parallel BC$ , AB không song song với CD. Gọi M, E, F là trung điểm AB, SA, SD.

- Tìm giao tuyến (MEF) và (ABCD).
- Tìm giao điểm BC và (MEF)
- Tìm giao điểm SC và (MEF)
- Gọi  $O = AC \cap BD$ . Tìm giao điểm SO và (MEF).

Bài 10. Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm OB, SO, BC.

- Tìm giao tuyến (NPO) và (SCD); (SAB) và (AMN)
- Tìm giao điểm E của SA và (MNP)

- c. Chứng minh rằng  $ME \parallel PN$   
 d. Tìm giao điểm  $MN$  và  $(SCD)$   
 e. Tìm thiết diện hình chóp với mặt phẳng  $(MNP)$   
 Bài 11. Cho hình chóp  $S.ABC$ . Gọi  $M, N, P$  là trung điểm  $AB, BC, SC$ . Cho  $SB = AC$ .

- a. Tìm giao điểm  $E$  của  $SA$  và  $(MNP)$   
 b. Chứng minh rằng  $NP \parallel ME \parallel SB$ . Tứ giác  $MNPE$  là hình gì?  
 c. Tìm giao tuyến  $(ANP)$  và  $(SMC)$   
 d. Tìm giao điểm  $SM$  và  $(ANP)$

Bài 12. Cho hình chóp  $S.ABCD$  đáy là hình bình hành tâm  $O$ . Gọi  $M, N, P$  là trung điểm  $SB, SD, OD$ .

- a. Tìm giao điểm  $I$  của  $BC$  và  $(AMN)$ ; tìm giao điểm  $J$  của  $CD$  và  $(AMN)$   
 b. Tìm giao điểm  $K$  của  $SA$  và  $(CMN)$   
 c. Tìm giao tuyến của  $(NPK)$  và  $(SAC)$   
 d. Tìm giao điểm của  $SC$  và  $(NPK)$   
 e. Tìm thiết diện hình chóp và  $(AMN)$

### **Dạng 7: ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG SONG SONG**

Bài 1. Cho hình chóp  $S.ABCD$  đáy là hình bình hành. Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm  $AB, CD, SA$ .

- a. Chứng minh  $MN \parallel (SBC)$ ;  $MN \parallel (SAD)$ .  
 b. Chứng minh  $SB \parallel (MNP)$ ;  $SC \parallel (MNP)$ .  
 c. Gọi  $I, J$  là trọng tâm. Chứng minh rằng  $IJ \parallel (SAB)$ ,  $IJ \parallel (SAD)$ ,  $IJ \parallel (SAC)$ .

Bài 2. Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $G$  là trọng tâm  $\triangle ABD$ ,  $M$  thuộc  $BC$  sao cho  $MB = 2MC$ . Chứng minh rằng  $MG \parallel (ACD)$

Bài 3. Cho hình chóp  $S.ABCD$  đáy là hình bình hành tâm  $O$ . Gọi  $I, J$  là trung điểm  $BC, SC$ .  $K$  thuộc  $SD$  sao cho  $SK = KD$ .

- a. Chứng minh  $OJ \parallel (SAD)$ ,  $OJ \parallel (SAB)$   
 b. Chứng minh  $IO \parallel (SCD)$ ,  $IJ \parallel (SBD)$   
 c. Gọi  $M$  là giao điểm của  $AI$  và  $BD$ . Chứng minh rằng  $MK \parallel (SBC)$

Bài 4. Cho hình chóp  $S.ABCD$  đáy là hình thoi tâm  $O$ . Gọi  $M, N, P$  là trung điểm  $SB, SO, OD$

- a. Chứng minh rằng  $MN \parallel (ABCD)$ ,  $MO \parallel (SCD)$   
 b. Chứng minh rằng  $NP \parallel (SAD)$ ,  $NPOM$  là hình gì?  
 c. Gọi  $ISD$  sao cho  $SD = 4ID$ . Chứng minh rằng  $PI \parallel (SBC)$ ,  $PI \parallel (SAD)$

Bài 5. Cho hai hình bình hành  $ABCD$  và  $ABEF$  không đồng phẳng có tâm lần lượt là  $I$  và  $J$ .

- a. Chứng minh  $IJ \parallel (ADF)$  và  $IJ \parallel (BCE)$   
 b. Gọi  $M, N$  lần lượt là trọng tâm  $\triangle ACE$  và  $\triangle ADF$ . Chứng minh rằng  $MN \parallel (CDEF)$

Bài 6. Cho hình chóp  $S.ABCD$ . Gọi  $M, N$  là 2 điểm trên  $AB, CD$ . Mặt phẳng  $(\alpha)$  qua  $MN$  và song song  $SA$ .

- a. Tìm giao tuyến của  $(SAB)$  và  $(\alpha)$ ;  $(SAC)$  và  $(\alpha)$   
 b. Xác định thiết diện của hình chóp và  $(\alpha)$

Bài 7. Cho hình chóp  $S.ABCD$  đáy là hình bình hành.  $M$  là trung điểm  $AB$ , mặt phẳng  $(\alpha)$  qua  $M$  và song song  $BD, SA$ . Xác định thiết diện hình chóp và  $(\alpha)$

Bài 8. Cho tứ diện  $ABCD$ .  $M$  là trung điểm  $AD$ ,  $N$  là điểm bất kỳ trên  $BC$ . Mặt phẳng  $(\alpha)$  chứa  $MN$  và song song  $CD$ . Xác định thiết diện của tứ diện và mặt phẳng  $(\alpha)$

Bài 8. Cho tứ diện  $ABCD$ . Điểm  $M$  tùy ý trên  $BC$ . Mặt phẳng  $(\alpha)$  qua  $M$  và song song với  $AC, BD$ . Xác định thiết diện của tứ diện và mặt phẳng  $(\alpha)$ .

### **Dạng 8: HAI MẶT PHẪNG SONG SONG**

Bài 1. Cho hình chóp  $S.ABCD$  đáy là hình bình hành tâm  $O$ . Gọi  $M, N, P, Q$  lần lượt là trung điểm  $SA, SD, AB, ON$ .

- a. Chứng minh  $(OMN) \parallel (SBC)$       b. Chứng minh  $PQ \parallel (SBC)$

Bài 2. Cho hình chóp  $S.ABCD$  đáy là hình bình hành tâm  $O$ . Gọi  $M, N, P$  là trung điểm  $SA, CD, AD$ .

- a. Chứng minh rằng  $(OMN) \parallel (SBC)$   
 b. Gọi  $I$  là điểm trên  $MP$ . Chứng minh rằng  $OI \parallel (SCD)$

Bài 3. Cho hình chóp  $S.ABCD$ , đáy là hình bình hành. Gọi  $M, N, P, Q$  là trung điểm  $BC, AB, SB, AD$ .

- a. Chứng minh  $(MNP) \parallel (SAC)$   
 b. Chứng minh  $PQ \parallel (SCD)$   
 c. Gọi  $I$  là giao điểm  $AM$  và  $BD$ ,  $J$  thuộc  $SA$  sao cho  $AJ = 2JS$ . Chứng minh rằng  $IJ \parallel (SBC)$

d. Gọi K thuộc AC. Tìm giao tuyến (SKM) và (MNC)

Bài 4. Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình bình hành. Gọi I, J, G, P, Q là trung điểm DC, AB, SB, BG, BI.

a. Chứng minh rằng  $(IJG) // (SAD)$

b. Chứng minh rằng  $PQ // (SAD)$

c. Tìm giao tuyến của (SAC) và (IJG)

d. Tìm giao tuyến của (ACG) và (SAD)

Bài 5. Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF không đồng phẳng. Gọi I, J, K là trung điểm AB, CD, EF.

Chứng minh  $(ADF) // (BCE)$  và  $(DIK) // (JBE)$