MỘT SỐ ĐỀ ÔN THI VÀO LỚP 10 – THPT

ĐỀ SỐ 1

Câu 1) Cho biểu thức $A=\left(\frac{2}{\sqrt{x}-2}+\frac{3}{2\sqrt{x}+1}-\frac{5\sqrt{x}-7}{2x-3\sqrt{x}-2}\right):\frac{2\sqrt{x}+3}{5x-10\sqrt{x}}$ $(x>0, x\neq 4)$.

1) Rút gọn biểu thức A.
2) Tính giá trị của A khi $x=3-2\sqrt{2}$
3) Tìm x sao cho A nhận giá trị là một số nguyên.

Câu 2) Cho phương trình $x^2-(m-1)-m^2+m-2=0$, với m là tham số.

a) Chứng minh rằng phương trình đã cho có hai nghiệm trái dấu với mọi m.
b) Gọi hai nghiệm của phương trình đã cho là x_1, x_2. Tìm m để biểu thức $A=\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^3-\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^3$ đạt giá trị lớn nhất.

Câu 3) Một ca nô xuôi dòng 78km và ngược dòng 44 km mất 5 giờ với vận tốc dự định. nếu ca nô xuôi 13 km và ngược dòng 11 km với cùng vận tốc dự định đó thì mất 1 giờ. Tính vận tốc riêng của ca nô và vận tốc dòng nước.

Câu 4) Từ điểm K nằm ngoài đường tròn (O) ta kẻ các tiếp tuyến KA, KB cát tuyến KCD đến (O) sao cho tia KC nằm giữa hai tia KA, KO. Gọi H là trung điểm CD.

a) Chứng minh: 5 điểm A, K, B, O, H cùng nằm trên một đường tròn.
b) Gọi M là trung điểm của AB. Chứng minh: Tứ giác $MODC$ nội tiếp.
c) Đường thẳng qua H song song với BD cắt AB tại I. Chứng minh $CI \perp OB$.

Câu 5) Cho các số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện: $x^2+y^2+z^2=2$. Chứng minh rằng: $x+y+z\leq xyz+2$.

ĐỀ SỐ 2

Câu 1) Cho biểu thức:

$$P=\left(\frac{2(a+b)}{\sqrt{a^3-2\sqrt{2b^3}}}-\frac{\sqrt{a}}{a+\sqrt{2ab}+2b}\right).\left(\frac{\sqrt{a^3}+2\sqrt{2b^3}}{2b+\sqrt{2ab}}-\sqrt{a}\right).$$

a) Tìm điều kiện của a và b để biểu thức P xác định. Rút gọn biểu thức P.

b) Biết $a=1+\frac{\sqrt{3}}{2}$ và $b=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}$. Tính giá trị của P .

Câu 2) Cho phương trình $2x^2+2mx+m^2-2=0$, với m là tham số. Gọi x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình.

a) Tìm hệ thức liên hệ giữa x_1,x_2 không phụ thuộc vào m.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của biểu thức

$$A=\frac{2x_1x_2+3}{x_1^2+x_2^2+2(x_1x_2+1)}.$$

Câu 3) Hưởng ứng phong trào "Vì biển đảo Trường Sa" một đôi tàu dự định chở 280 tấn hàng ra đảo. Nhưng khi chuẩn bị khởi hành thì số hàng hóa đã tăng thêm 6 tấn so với dự định. vì vậy đội tàu phải bổ sung thêm 1 tàu và mỗi tàu chở ít hơn dự định 2 tấn hàng. Hỏi khi dự định đội tàu có bao nhiêu chiếc tàu, biết các tàu chở số tấn hàng bằng nhau.

Câu 4) Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x+my=m+1 \\ mx+y=3m-1 \end{cases}$ Tìm m để hệ trên có nghiệm duy nhất sao cho $x.y$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 5) Cho nửa đường tròn $(O;R)$ đường kính BC. A là một điểm di động trên nửa đường tròn. Vẽ AH vuông góc với BC tại H. Đường tròn đường kính AH cắt AB,AC và nửa đường tròn (O) lần lượt tại D,E,M. AM cắt BC tại N.

a) Chứng minh rằng tứ giác $ADHE$ là hình chữ nhật và $AME=ACN$.

b) Tính $\dfrac{DE^3}{BD.CE}$ theo R và chứng minh rằng D,E,N thẳng hàng.

c) Xác định vị trí điểm A để diện tích tam giác ABH lớn nhất.

Câu 6) Cho $x,y>0$ và $x^2+y^3\ge x^3+y^4$. Chứng minh rằng: $x^3+y^3\le 2$.

ĐỀ SỐ 3

Câu 1) Cho $b>a>0$. Xét biểu thức:

$$P=\frac{\sqrt{a^3}-\sqrt{b^3}}{a-b}-\frac{a}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\frac{b}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}.$$

a) Rút gọn P.

b) Biết $(a-1)(b-1)+2\sqrt{ab}=1$, hãy tính giá trị của biểu thức P.

Câu 2) Cho Parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=mx+4$.

a) Chứng minh đường thẳng (d) luôn cắt đồ thị (P) tại hai điểm phân biệt A,B .Gọi x_1,x_2 là hoành độ của các điểm A,B. Tìm giá trị lớn nhất của $Q=\dfrac{2(x_1+x_2)+7}{{x_1}^2+{x_2}^2}$.

b) Tìm m để diện tích tam giác OAB bằng 8.

Câu 3) Một ô tô và một xe máy khởi hành cùng một lúc từ hai tỉnh A,B cách nhau 150km, đi ngược chiều và gặp nhau sau $1,5$h. Hỏi sau khi gặp nhau bao lâu thì ô tô đến B và xe máy đến A biết rằng vận tốc của xe máy bằng $\dfrac{2}{3}$ vận tốc của ô tô.

Câu 4) Cho tam giác ABC vuông tại A và $AB<AC$. Gọi H là hình chiếu của A trên BC và M là một điểm đối xứng của H qua AB. Tia MC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABH tại điểm $P\,(P\ne M)$. Tia HP cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác APC tại điểm $N\,(N\ne P)$.

a) Chứng minh rằng $HN = MC$.
b) Gọi E là giao điểm thứ hai của AB với đường tròn ngoại tiếp tam giác APC. Chứng minh rằng EN song song với BC.
c) Gọi K là giao điểm thứ hai của BC với đường tròn ngoại tiếp tam giác APC. Chứng minh rằng H là trung điểm BK.

Câu 5) Cho các số a,b,c không âm. Chứng minh rằng
$a^3+b^3+c^3 \geq a^2\sqrt{bc}+b^2\sqrt{ca}+c^2\sqrt{ab}$.

ĐỀ SỐ 4

Câu 1) Cho biểu thức $P=\left(\dfrac{6x+4}{3\sqrt{3x^3}-8}-\dfrac{\sqrt{3x}}{3x+2\sqrt{3x}+4}\right)\left(\dfrac{1+3\sqrt{3x^3}}{1+\sqrt{3x}}-\sqrt{3x}\right)$.

a) Rút gọn P.
b) Xác định x nguyên sao cho P nguyên.

Câu 2) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol (P) có phương trình $y=\dfrac{-x^2}{2}$. Gọi (d) là đường thẳng đi qua $I(0;-2)$ và có hệ số góc k.

a) Viết phương trình đường thẳng (d). Chứng minh đường thẳng (d) luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt A,B khi k thay đổi.
b) Gọi H,K theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của A,B trên trục hoành. Chứng minh rằng tam giác IHK vuông tại I.

Câu 3) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+\dfrac{1}{x}+y+\dfrac{1}{y}=\dfrac{9}{2} \\ xy+\dfrac{1}{xy}=\dfrac{5}{2} \end{cases}$.

Câu 4) Cho đường tròn (O) và điểm A nằm ngoài đường tròn (O). Từ A vẽ hai tiếp tuyến AB, AC của đường tròn (O) (B,C là hai tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của AO và BC. Qua A vẽ cát tuyến ADE của đường tròn

(IO); D và E thuộc đường tròn (O) sao cho đường thẳng AE cắt đoạn thẳng HB tại I. Gọi M là trung điểm dây cung DE.

a) Chứng minh $AB^2 = AD.AE$.

b) Chứng minh năm điểm A, B, M, O, C cùng thuộc một đường tròn.

c) Chứng minh tứ giác $OHDE$ nội tiếp.

d) Trên tia đối của tia HD lấy điểm F sao cho H là trung điểm DF. Tia AO cắt đường thẳng EF tại K. Chứng minh $IK//DF$.

Câu 5) Cho $a,b,c \in \left[\frac{1}{2};1\right]$. Chứng minh rằng: $2 \le \frac{a+b}{1+c} + \frac{b+c}{1+a} + \frac{c+a}{1+b} \le 3$.

ĐỀ SỐ 5

Câu 1) Cho $P = \left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6}\right) : \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right)$

a) Rút gọn P.
b) Tìm x nguyên để $P < 0$.
c) Tìm x để $Q = \frac{1}{P}$ nhỏ nhất.

Câu 2) Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = (m+5)x - m$ với m là tham số.

a) Chứng minh rằng d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.
b) Gọi $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ là các giao điểm của d và (P). Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = |x_1 - x_2|$.

Câu 3) Trên quãng đường AB dài 210 m, tại cùng một thời điểm một xe máy khởi hành từ A đến B và một ôt ô khởi hành từ B đi về A. Sauk hi gặp nhau xe máy đi tiếp 4 giờ nữa thì đến B và ô tô đi tiếp 2 giờ 15 phút nữa thì đến A. Biết rằng vận tốc ô tô và xe máy không thay đổi trong suốt chặng đường. Tính vận tốc của xe máy và ô tô.

Câu 4) Cho đường tròn (O) và dây cung BC không là đường kính. Gọi A là điểm chính giữa của cung lớn BC. Các tiếp tuyến tại B,C của (O) cắt nhau tại S. Gọi H là hình chiếu vuông góc của C trên AB và M là trung điểm của CH. Tia AM cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai N.

a) Gọi D là giao điểm của SA với BC. Chứng minh tứ giác $CMDN$ nội tiếp.
b) Tia SN cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai E. Chứng minh rằng CE song song với SA
c) Chứng minh đường thẳng CN đi qua trung điểm của đoạn thẳng SD.

Câu 5) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+y^3+7(x+y)xy=8xy\sqrt{2(x^2+y^2)} \\ \sqrt{y}-\sqrt{2x-3}=6-2x \end{cases}$

MỘT SỐ ĐỀ ÔN THI VÀO LỚP 10 – THPT CHUYÊN

ĐỀ SỐ 6.

Câu 1) Giải phương trình: $x^2+x+6+2x\sqrt{x+3}=4\left(x+\sqrt{x+3}\right)$

Câu 2) Cho a,b,c là ba số thực dương thỏa mãn $a+b+c=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=2$. Chứng minh rằng:
$\dfrac{\sqrt{a}}{1+a}+\dfrac{\sqrt{b}}{1+b}+\dfrac{\sqrt{c}}{1+c}=\dfrac{2}{\sqrt{(1+a)(1+b)(1+c)}}$.

Câu 3) Chứng minh: $a_n=\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n-2$ là số chính phương với mọi số tự nhiên lẻ.

Câu 4) Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) có 3 đường cao AD, BE, CF đồng quy tại điểm H. Đường thẳng CH cắt (O) tại điểm G khác C. GD cắt (O) tại điểm K khác G.

a) Chứng minh OA vuông góc với EF.

b) Chứng minh: AK đi qua trung điểm M của DE.

c) Gọi N là trung điểm của DF, AN cắt (O) tại điểm L khác A .Chứng minh 4 điểm M, L, N, K cùng thuộc một đường tròn.

Câu 5) Cho a, b, c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$.

Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{1+2bc}+\frac{b^2}{1+2ca}+\frac{c^2}{1+2ab} \ge \frac{3}{5}$.

Câu 6) Cho tập hợp M gồm 1009 số nguyên dương đôi một khác nhau và số lớn nhất trong M bằng 2016. Chứng minh rằng trong tập M có hai số, mà số này là bội của số kia.

ĐỀ SỐ 7.

Câu 1) Giải phương trình $x^4+4x^3+6x^2+4x+\sqrt{x^2+2x+17}=3$.

Câu 2) Tìm ba chữ số tận cùng của $A = 26^{6^{2015}}$.

Câu 3)

a) Tìm các nghiệm nguyên của phương trình: $x^3 - y^3 = xy + 8$.

b) Biết $x=\frac{\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}.\left(2-\sqrt{3}\right)}{\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}}$. Tính giá trị của biểu thức $P=\left(3x^3-x^2-1\right)^{2016}$

Câu 4) Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp (O) . Tiếp tuyến tại A của (O) cắt tiếp tuyến tại B, C của (O) lần lượt tại S, T . BT cắt AC tại E , CS cắt AB tại F . Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của

BE, CF, AB, AC . Đường thẳng BQ, CP cắt (O) tại giao điểm thứ 2 là K, L .

a) Chứng minh: $\Delta ABK \# \Delta EBC$.

b) Chứng minh tứ giác $PQKL$ nội tiếp.

c) Chứng minh: $BCM = CBN$.

Câu 5) Với n là số tự nhiên, $n \geq 2$, cho n số nguyên $x_1, x_2, ..., x_n$ thỏa mãn:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_2^3 + ... + x_n^2 + n^3 \leq (2n-1)(x_1 + x_2 + ... + x_n) + n^2$$

Chứng minh rằng:

a) Các số $x_i\ (i = 1, 2, ..., n)$ là số nguyên dương.

b) Số $x_1 + x_2 + ... + x_n + n + 1$ không là số chính phương.

ĐỀ SỐ 8

Câu 1) Giải phương trình $\sqrt{x+9} = \sqrt{x} + \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}}$.

Câu 2) Cho các số x, y thỏa mãn: $\begin{cases} x^3 + 3y^2 - 6y + 11 = 0 \\ x^2 + y^2(x^2 - 3) - 2y - 3 = 0 \end{cases}$.Tính giá trị của $P = x^3 + y^3$.

Câu 3) Tìm tất cả các số tự nhiên n để: $2^{2012} + 2^{2015} + 2^n$ là số chính phương.

Câu 4) Cho tam giác ABC nội tiếp (O) với $AB < AC$. Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC tại T Dựng đường kính AD, OT cắt BD tại điểm E .Gọi M là trung điểm của BC.

a) Chứng minh: $EOD = AMC$.

b) Chứng minh: $AE // CD$.

c) Giả sử BE cắt AT tại điểm F. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt OE tại điểm G khác E. Chứng minh tâm đường tròn nội tiếp tam giác AGB nằm trên (O).

Câu 5) Cho tập hợp $X = \{1, 4, 7, 10, ..., 100\}$. Gọi A là một tập con của tập X mà số phần tử của A bằng 19. Chứng minh rằng trong A có hai phần tử phân biệt mà tổng của chúng bằng 104.

ĐỀ SỐ 9.

Câu 1) Cho các số x, y, z thỏa mãn

$x\sqrt{1-2y^2} + y\sqrt{4-6z^2} + z\sqrt{15-3x^2} = 4$.

Tính giá trị của biểu thức $P = x^2 + 2y^2 + 3z^2$.

Câu 2) Tìm phần nguyên của : $A = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{2014^2}} + \frac{1}{\sqrt{2016^2}}$.

Câu 3)

a) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} xy(3x+y) = 4 \\ 7x^3 + 11 = 3(x+y)(x+y+1) \end{cases}$.

b) Cho a, b là các số nguyên dương phân biệt sao cho $ab(a+b)$ chia hết cho $a^2 + ab + b^2$. Chứng minh rằng: $|a-b| > \sqrt[3]{ab}$

Câu 4) Cho tam giác ABC, trên đoạn thẳng AC lấy điểm P, trên đoạn thẳng PC lấy điểm Q sao cho $\frac{PA}{PC} = \frac{QP}{QC}$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABQ cắt BC tại điểm R khác B. Đường tròn ngoại tiếp tam giác PAB, PQR cắt nhau tại điểm S khác P, SP cắt AB tại điểm D.

a) Chứng minh: AC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác PBR.

b) Chứng minh tam giác CSP cân.
c) Chứng minh 4 điểm B, S, R, D cùng nằm trên một đường tròn.

Câu 5) Chứng minh rằng m, n là các số nguyên dương và $n \geq m$ luôn có

$(n+1)^m n^m \geq \dfrac{(n+m)!}{(n-m)!} \geq 2^m m!$. (quy ước $0! = 1$)

ĐỀ SỐ 10

Câu 1) Giải phương trình: $\sqrt{35 - 2\sqrt{45 - 2x}} = x - 5$.

Câu 2) Chứng minh: $A = 2^{2^{2n+1}} + 3$ là hợp số với mọi số nguyên dương $n > 1$.

Câu 3) Cho tập hợp A có các tính chất sau:

a) Tập A chứa toàn bộ các số nguyên.
b) $\sqrt{2} + \sqrt{3} \in A$
c) Với mọi $x, y \in A$ thì $x + y \in A$ và $xy \in A$. Chứng minh rằng $\dfrac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} \in A$.

Câu 4) Cho tam giác ABC nhọn, không cân nội tiếp (O). Đường tròn tâm C bán kính CB cắt BA tại điểm D khác B và cắt (O) tại E khác B. DE cắt (O) tại điểm F khác E. CO cắt DE, AB lần lượt tại G, L. Lấy các điểm M, N lần lượt thuộc LE, LF sao cho MG, DN cùng vuông góc với BC. Gọi H là giao điểm của CF, BE.

a) Chứng minh: Tứ giác $CHDE$ nội tiếp.
b) Chứng minh: Tứ giác $HGLF$ nội tiếp.
c) Chứng minh: $DN = MG$.

Câu 5) Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = abc + 2$. Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + c^2 + abc \geq 4$.

LỜI GIẢI CÁC ĐỀ TOÁN RÈN LUYỆN

ĐỀ SỐ 1.

Câu 1)

1) Với $x>0, x\neq 4$ biểu thức có nghĩa ta có:

$$A=\left(\frac{2}{\sqrt{x}-2}+\frac{3}{2\sqrt{x}+1}-\frac{5\sqrt{x}-7}{2x-3\sqrt{x}-2}\right):\frac{2\sqrt{3}+3}{5x-10\sqrt{x}}$$

$$=\frac{2\left(2\sqrt{x}+1\right)+3\left(\sqrt{x}-2\right)-\left(5\sqrt{x}-7\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(2\sqrt{x}+1\right)}:\frac{2\sqrt{x}+3}{5\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)}$$

$$=\frac{2\sqrt{x}+3}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(2\sqrt{x}+1\right)}.\frac{5\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)}{2\sqrt{x}+3}=\frac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}.$$

Vậy với $x>0, x\neq 4$ thì $A=\dfrac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}$.

2) Khi $x=3-2\sqrt{2}=\left(\sqrt{2}-1\right)^2 \Rightarrow \sqrt{x}=\sqrt{2}-1$ thay vào ta

có: $A=\dfrac{5\left(\sqrt{2}-1\right)}{2\left(\sqrt{2}-1\right)+1}=\dfrac{5\left(\sqrt{2}-1\right)}{2\sqrt{2}-1}=\dfrac{5\left(\sqrt{2}-1\right)\left(2\sqrt{2}+1\right)}{7}=\dfrac{5\left(3-\sqrt{2}\right)}{7}$

3) Ta có $\sqrt{x}>0, \forall x>0, x\neq 4$ nên

$$A=\frac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}>0, x>0, x\neq 4 \quad A=\frac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}=\frac{5}{2}-\frac{5}{2\left(2\sqrt{x}+1\right)}<\frac{5}{2}, x>0, x\neq 4$$

$\Rightarrow 0<A<\dfrac{5}{2}$, kết hợp với A nhận giá trị là một số nguyên thì $A\in\{1,2\}$.

$A=1 \Leftrightarrow 5\sqrt{x}=2\sqrt{x}+1 \Rightarrow \sqrt{x}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow x=\frac{1}{9}$ thỏa mãn điều kiện. $A=2 \Leftrightarrow 5\sqrt{x}=4\sqrt{x}+2 \Leftrightarrow \sqrt{x}=2 \Leftrightarrow x=4$ không thỏa mãn điều kiện.

Vậy với $x=\frac{1}{9}$ thì A nhận giá trị là nguyên.

Câu 2)

a) Xét $a.c=-m^2+m-2=-\left(m-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}<0, \forall m \in \mathbb{R}$

Vậy phương trình luôn có hai nghiệm trái dấu với mọi m.

b) Gọi hai nghiệm của phương trình đã cho là x_1, x_2.

Theo câu a) thì $x_1x_2 \neq 0$, do đó A được xác định với mọi x_1, x_2.

Do x_1, x_2 trái dấu nên $\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^3=-t$ với $t>0$, suy ra $\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^3<0$, suy ra $A<0$

Đặt $\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^3=-t$, với $t>0$, suy ra $\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^3=-\frac{1}{t}$. Khi đó $A=-t-\frac{1}{t}$ mang giá trị âm và A đạt giá trị lớn nhất khi $-A$ có giá trị nhỏ nhất. Ta có

$-A=t+\frac{1}{t} \geq 2$, suy ra $A \leq -2$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$t=\frac{1}{t} \Leftrightarrow t^2=1 \Rightarrow t=1$. Với $t=1$, ta có

$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^3=-1 \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2}=-1 \Leftrightarrow x_1=-x_2 \Leftrightarrow x_1+x_2=0 \Leftrightarrow -(m-1)=0 \Leftrightarrow m=1$.

Vậy với $m=1$ thì biểu thức A đạt giá trị lớn nhất là -2.

Câu 3) Gọi vận tốc riêng của ca nô là x (km/h, $x>0$)

Và vận tốc của dòng nước là y (km/h, $y>0$

Ca nô xuôi dòng đi với vận tốc $x+y$ (km/h). Đi đoạn đường 78 km nên thời gian đi là $\frac{78}{x+y}$ (giờ).

Ca nô đi ngược dòng với vận tốc $x-y$ (km/h). Đi đoạn đường 44 km nên thời gian đi là $\frac{44}{x-y}$ (giờ).

Tổng thời gian xuôi dòng là 78 km và ngược dòng là 44 km mất 5 giờ nên ta có phương trình: $\frac{78}{x+y}+\frac{44}{x-y}=5$ (1).

Ca nô xuôi dòng 13 km và ngược dòng 11 km nên ta có phương trình:

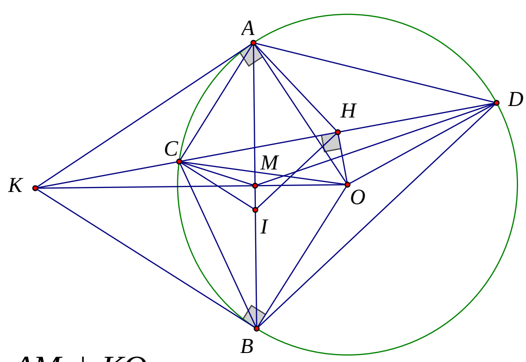
$\frac{13}{x+y}+\frac{11}{x-y}=1$ (2)**.** Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}\frac{78}{x+y}+\frac{44}{x-y}=5\\ \frac{13}{x+y}+\frac{11}{x-y}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=26\\ x-y=22\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=24\\ y=2\end{cases}.$$

Đối chiếu với điều kiện ta thấy thỏa mãn.

Vậy vận tốc riêng của ca nô là 24 km/h và vận tốc của dòng nước là 2 km/h.

Câu 4)



a) Vì KA, KB là các tiếp tuyến của (O) nên $KAO = KBO = 90^0$. Do H là trung điểm của dây CD nên $KHO = 90^0$. Từ đó suy ra 5 điểm K, A, H, O, B cùng nằm trên đường tròn đường kính KO.

b) Vì M là trung điểm của AB nên $AM \perp KO$. Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông KAO

Ta có: $KM.KO = KA^2$.

Xét tam giác KAC và tam giác KDA có $KAC = KDA$(Tính chất góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung). Góc AKD chung .

Nên $\Delta KAC\# \Delta KDA(g.g)$. Suy ra $\dfrac{KA}{KC}=\dfrac{KD}{KA}\Rightarrow KA^2=KC.KD$. Suy ra $KC.KD=KH.KO\Rightarrow \Delta KMC\# \Delta KDO(g.g)\Rightarrow CMK=CDO\Rightarrow CMOD$ nội tiếp.

c) Ta có $HI//BD\Rightarrow CHI=CDB$. Mặt khác $CAB=CDB$ cùng chắn cung CB nên suy ra $CHI=CAB$ hay $AHIC$ là tứ giác nội tiếp. Do đó $IAH=ICH \Leftrightarrow BAH=ICH$. Mặt khác ta có A,K,B,O,H cùng nằm trên đường tròn đường kính OK nên $BAH=BKH$. Từ đó suy ra $ICH=BKH\Rightarrow CI//KB$. Mà $KB\perp OB\Rightarrow CI\perp OB$

Câu 5) Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta có:

$$x+y+z-xyz=x(1-yz)+(y+z).1\le\sqrt{\left[x^2+(y+z)^2\right]\left[(1-yz)^2+1\right]}$$

Tới đây ta cần chứng minh

$(2+2yz)(2-2yz+y^2z^2)\le 4\Leftrightarrow y^3z^3-y^2z^2\le 0\Leftrightarrow y^2z^2(yz-1)\le 0$.

Mặt khác theo giả thiết ta có: ta có

$2=x^2+y^2+z^2\ge y^2+z^2\ge 2yz\Rightarrow yz\le 1$.Nên bất đẳng thức trên luôn đúng. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi có 2 số bằng 1 và một số bằng 0.

ĐÁP ÁN ĐỀ 2

Câu 1) Điều kiện: $a\ge 0,b>0,a\ne 2b$

a) Ta có: $\sqrt{a^3}-2\sqrt{2b^3}=\left(\sqrt{a}\right)^3-\left(\sqrt{2b}\right)^3=\left(\sqrt{a}-\sqrt{2b}\right)\left(a+\sqrt{2ab}+2b\right)$

b) Suy ra

$$\frac{2(a+b)}{\sqrt{a^3}-2\sqrt{2b^3}}-\frac{\sqrt{a}}{a+\sqrt{2ab}+2b}=\frac{2(a+b)-\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-\sqrt{2b}\right)}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{2b}\right)\left(a+\sqrt{2ab}+2b\right)}$$

$$=\frac{a+\sqrt{2ab}+2b}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{2b}\right)\left(a+\sqrt{2ab}+2b\right)}=\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{2b}}$$

$$\frac{\sqrt{a^3}+2\sqrt{2b^3}}{2b+\sqrt{2ab}}-\sqrt{a}=\frac{\left(a+\sqrt{2b}\right)\left(a-\sqrt{2ab}+2b\right)}{\sqrt{2b}\left(\sqrt{2b}+\sqrt{a}\right)}-\sqrt{a}$$

$$=\frac{a-\sqrt{2ab}+2b}{\sqrt{2b}}-\sqrt{a}=\frac{a-2\sqrt{2ab}+2b}{\sqrt{2b}}=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{2b}\right)^2}{\sqrt{2b}}$$

Vậy $P=\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{2b}}.\dfrac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{2b}\right)^2}{\sqrt{2b}}=\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{2b}}{\sqrt{2b}}$.

c) Ta có: $a.b=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right).\left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)+\dfrac{1}{8}$. Suy ra: $2b=\dfrac{1}{4a}$.Do đó

$$P=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{2b}}{\sqrt{2b}}=\sqrt{\frac{a}{2b}}-1=\sqrt{4a^2}-1=2a-1=1+\sqrt{3}.$$

Câu 2)

Ta có $\Delta=m^2-4(m-1)=(m-2)^2\geq 0$, với mọi m.

Do đó phương trình luôn có nghiệm với mọi giá trị của m.

Theo hệ thức Viet, ta có: $x_1+x_2=m$ và $x_1x_2=m-1$

a) Thay $m=x_1+x_2$ vào $x_1x_2=m-1$, ta được $x_1x_2=x_1+x_1-1$

Vậy hệ thức liên hệ giữa x_1,x_2 không phụ thuộc vào m là $x_1x_2=x_1+x_1-1$.

b) Ta có: $x_1^2+x_2^2=\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2=m^2-2(m-1)=m^2-2m+2$.

Suy ra $A=\dfrac{2x_1x_2+3}{x_1^2+x_2^2+2\left(x_1x_2+1\right)}=\dfrac{2m+1}{m^2+2}$. Vì

$$A-1=\frac{2m+1}{m^2+2}-1=\frac{2m+1-m^2-2}{m^2+2}=-\frac{(m-1)^2}{m^2+2}\leq 0,\forall m\in\mathbb{R}$$

Suy ra $A\leq 1,\forall m\in\mathbb{R}$. Dấu "=" xảy ta khi và chỉ khi $m=1$

Và $A+\dfrac{1}{2}=\dfrac{2m+1}{m^2+2}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{2(m+1)+m^2+2}{2\left(m^2+2\right)}=\dfrac{(m+2)^2}{2\left(m^2+2\right)}\geq 0,\forall m\in\mathbb{R}$. Suy ra

$A\geq -\dfrac{1}{2},\forall m\in\mathbb{R}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $m=-2$.

Vậy GTLN của A bằng 1 khi $m=1$ và GTNN của A bằng $-\frac{1}{2}$ khi $m=-2$.

Câu 3) Gọi x (chiếc) là số tàu dự định của đội $\left(x \in \mathbb{N}^*, x<140\right)$

Số tàu tham gia vận chuyển là $x+1$ (chiếc)

Số tấn hàng trên mỗi chiếc theo dự định $\frac{280}{x}$ (tấn)

Số tấn hàng trên mỗi chiếc thực tế $\frac{286}{x+1}$ (tấn)

Theo bài ra ta có phương trình: $\frac{280}{x}-\frac{286}{x+1}=2$

$\Leftrightarrow 280(x+1)-286x=2x(x+1) \Leftrightarrow x^2+4x-140=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=10 \\ x=-14(l) \end{array}\right.$. Vậy đội tàu lúc đầu có 10 chiếc tàu.

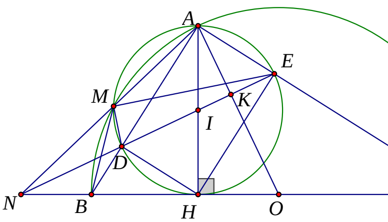
Câu 4) Xét hệ phương trình: $\begin{cases} x+my=m+1 & (1) \\ mx+y=3m-1 & (2) \end{cases}$. Từ phương trình (2) của hệ ta suy ra $y=3m-1-mx$ thay vào phương trình (1) của hệ ta thu được: $x+m(3m-1-mx)=m+1 \Leftrightarrow \left(1-m^2\right)x=-3m^2+2m+1$. Hệ có nghiệm duy nhất khi à chỉ khi phương trình $\left(1-m^2\right)x=-3m^2+2m+1$ có nghiệm duy nhất suy ra điều kiện là: $\left(1-m^2\right) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$.

Khi hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)$ ta lấy phương trình (2) trừ phương trình (1) thì thu được: $(m-1)x-(m-1)y=2(m-1) \Rightarrow x-y=2$. Do đó: $xy=x.(x-2)=x^2-2x+1-1=(x-1)^2-1 \geq -1$ Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi: $x=1 \Leftrightarrow 3-\frac{2}{m+1}=1 \Leftrightarrow \frac{2}{m+1}=2 \Leftrightarrow m+1=1 \Leftrightarrow m=0$. Vậy với $m=0$ thì $x.y$ đạt giá trị nhỏ nhất

Câu 5)

a) ΔABC nội tiếp đường tròn đường kính $BC \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại $A \Rightarrow$ Chứng minh tứ giác $ADHE$

là hình chữ nhật và $ADH = 90^0, AEH = 90^0$. Vậy $DAE = ADH = AEH = 90^0$ nên tứ giác $ADHE$ là hình chữ nhật.



b). Ta có $AM.AN = AE.AC = \left(AH^2\right)$ $\Rightarrow \dfrac{AM}{AC} = \dfrac{AE}{AN}$

$\Rightarrow \dfrac{AM}{AC} = \dfrac{AE}{AN} \Rightarrow \Delta AME \backsim \Delta CAN$ (c.g.c) $\Rightarrow AME = ACN$. Áp dụng hệ thức lượng trong các tam giác vuông ta có $BD^2 = BD.AB; CH^2 = CE.CA$

$AB.AC = AH.BC = AH.2R$ (Vì $BC = 2R$)

$AH^2 = BH.CH \Rightarrow AH^4 = BH^2.CH^2 = BD.AB.CE.CA = BD.CE.AH.2R$

$\Rightarrow \dfrac{AH^3}{BD.CE} = 2R$, mà $AH = DE$ nên $\dfrac{DE^3}{BD.CE} = 2R$.

Giả sử DE cắt AH tại I, cắt OA tại K; $IAE = IEA$ (ΔIAE cân tại I), $OAC = OCA$ (ΔOAC cân tại O). Do đó $KAE + KEA = OCA + IAE = 90^0$ $\Rightarrow OA \perp DE$. Ta có $DI \perp OA$ (1). Mặt khác $(O),(I)$ cắt nhau tại A và M $\Rightarrow OI$ là đường trung trực của AM $\Rightarrow OI \perp AM$. Do đó I là trực tâm của $\Delta ANO \Rightarrow NI \perp OA$ (2). Từ (1) và (2) cho DI, NI trùng nhau. Vậy D, E, N thẳng hàng.

c) Đặt $BH = x(0 < x < 2R), CH = 2R - x$ nên $AH = \sqrt{x(2R - x)}$

$$S_{ABH} = \frac{1}{2}AH.BH = \frac{1}{2}x\sqrt{x(2R-x)} = \frac{\sqrt{3}}{2}x\sqrt{\frac{x}{3}(2R-x)} \le \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{2}\left(\frac{x}{3} + 2R - x\right)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4}x\left(2R - \frac{2x}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}.\frac{x}{2}\left(R - \frac{x}{3}\right) \le \frac{3\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{4}\left(\frac{x}{3} + R - \frac{x}{3}\right)^2 = \frac{3\sqrt{3}R^2}{8}$$

. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $BH = 0.\dfrac{3R}{2} \Leftrightarrow A$ là giao điểm của nửa đường tròn (O) với đường trung trực của OC.

Câu 6) Sử dụng lần lượt các bất đẳng thức Cauchy - Schwarz kết hợp với giả thiết của bài toán, ta được:

$x^3+y^3=\sqrt{x^3}.\sqrt{x^3}+y.y^2\le\sqrt{\left(x^3+y^2\right)\left(x^3+y^4\right)}\le\sqrt{\left(x^3+y^2\right)\left(x^2+y^3\right)}$.

Theo bất đẳng thức AM- GM ta cũng có:

$\sqrt{\left(x^3+y^2\right)\left(x^2+y^3\right)}\le\dfrac{x^2+y^2+x^3+y^3}{2}$, và

$x^3+x^3+1\ge 3x^2; y^3+y^3+1\ge 3x^2$ suy ra

$$\frac{x^2+y^2+x^3+y^3}{2}\le\frac{\dfrac{2x^3+1}{3}+\dfrac{2y^3+1}{3}+x^3+y^3}{2}=\frac{5}{6}\left(x^3+y^3\right)+\frac{1}{3}$$

$\Rightarrow x^3+y^3\le 2$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=1$.

ĐÁP ÁN ĐỀ 3.

Câu 1)

a) Ta có:

$$P=\frac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}-a\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)+b\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{a-b}=\frac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}{a-b}=\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$$

.

b) Ta có: $(a-1)(b-1)+2\sqrt{ab}=1\Rightarrow ab=a+b-2\sqrt{ab}=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2$

Vì $a<b$ nên $\sqrt{ab}=\sqrt{b}-\sqrt{a}$.

Vậy $P=-1$.

Câu 2)

a) Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là:

$x^2=mx+4\Leftrightarrow x^2-mx-4=0$.

Ta có $\Delta=m^2+16>0$, với mọi m nên phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt, suy ra đường thẳng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt. Theo định lý Viet ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=m\\x_1.x_2=-4\end{cases}$ ta có $Q=\dfrac{2m+7}{m^2+8}$. (dùng phương pháp miền giá trị hàm số- Xem thêm phần ứng dụng trong bài toán GTLN, GTNN) ta dễ tìm được giá trị lớn nhất của Q là 1 và GTNN của Q là $-\frac{1}{8}$ đạt được khi $m=1$ và $m=-8$.

b)

Để ý rằng đường thẳng (d) luôn đi qua điểm cố định $I(0;4)$ nằm trên trục tung. Ngoài ra nếu gọi $A(x_1;y_1), B(x_2;y_2)$ thì $x_1.x_2=-4<0$ nên hai giao điểm A,B nằm về hai phía trục tung. Giả sử $x_1<0<x_2$ thì ta có:

$S_{OAB}=S_{OAI}+S_{OBI}=\frac{1}{2}AH.OI+\frac{1}{2}BK.OI$ với H,K lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm A,B trên trục Oy. Ta có $OI=4, AH=|x_1|=-x_1, BK=|x_2|=x_2$. Suy ra $S_{OAB}=2(x_2-x_1)$ $\Rightarrow S_{OAB}^2=4(x_1-x_2)^2=4\left[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\right]$. Theo định lý Viet ta có: $x_1+x_2=m, x_1x_2=-4$. Thay vào ta có: $S_{OAB}^2=4(m^2+16)=64 \Leftrightarrow m=0$.

Câu 3) Gọi vận tốc của xe máy là x km/h $(x>0)$. Khi đó vận tốc của ô tô là $\frac{3x}{2}$ km/h. Theo bài ra ta có phương trình: $1,5x+1,5.\frac{3x}{2}=150 \Leftrightarrow x=40$. Do đó, vận tốc của xe máy là 40 km/h và vận tốc của ô tô là 60 km/h. Sau khi gặp nhau, thời gian ô tô đi đến B là: $\frac{150}{60}-1,5=1$ (giờ). Sau khi gặp nhau, thời gian xe máy đi đến A là: $\frac{150}{40}-1,5=2,25$ (giờ).

Câu 4)

a) Do đường tròn (ABH) có đường kính là AB nên $M\in(ABH)$.

Xét hai tam giác AHN và AMC có $AM=AH$;

Và có $AMC=AMP=AHP=AHN$; $ACM=ACP=ANP=ANH$ Suy ra $\Delta AHN=\Delta AMC$. Vậy $HN=MC$.

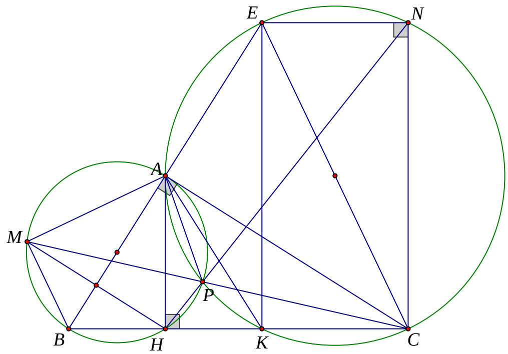
b) Do $CAE = 90^0$ nên CE là đường kính của đường tròn (APC). Suy ra $EN \perp NC$.

Ta chứng minh $CN \perp BC$.

Ta có: $ACN = APN =$

$AMH = ABH = HAC$.

Do đó $CN // AH$ hay $CN \perp BC$.



c) Xét đường tròn (APC), ta có: $AKB = APM = \frac{1}{2}$ sđ AC Xét đường tròn (ABH), ta có: $APM = AHM = AMH = ABH$. Suy ra $AKB = ABK$ hay tam giác ABK cân tại A.Do đó $HB = HK$.

Câu 5)

Ta có $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \geq (a+b)ab$. Tương tự ta cũng có $b^3 + c^3 \geq (b+c)bc$ và $c^3 + a^3 \geq (c+a)ca$. Do đó

$2(a^3 + b^3 + c^3) \geq ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)$

$= a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) \geq 2a^2\sqrt{bc} + 2b^2\sqrt{ca} + 2c^2\sqrt{ab}$. Vậy

$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2\sqrt{bc} + b^2\sqrt{ca} + c^2\sqrt{ab}$ (đpcm). Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

ĐÁP ÁN ĐỀ 4

Câu 1) Điều kiện: $x \geq 0; x \neq \frac{3}{4}$. Đặt $\sqrt{3x} = a$, ta có:

$$P = \left(\frac{2a^2 + 4}{a^3 - 8} - \frac{a}{a^2 + 2a + 4}\right)\left(\frac{1 + a^3}{1 + a} - a\right)$$

$= \frac{2a^2 + 4 - a(a-2)}{(a-2)(a^2 + 2a + 4)}.(1 - a + a^2 - a) = \frac{a^2 - 2a + 1}{a - 2}$. Thay $a = \sqrt{3x}$, ta có:

$P = \frac{3x - 2\sqrt{3x} + 1}{\sqrt{3x} - 2}$. Ta có: $P = \frac{3x - 3}{\sqrt{3x} - 2} - 2$

Với $x=1$ ta có $P=-2$ (thỏa mãn).

Xét $x\neq 1$: Do $3x-3\in\mathbb{Z}$; $3x-3\neq 0$ và $P\in\mathbb{Z}$ nên $\sqrt{3x}-2\in\mathbb{Z}$. Ta có:

$P=\sqrt{3x}+\dfrac{1}{\sqrt{3x}-2}$. Do đó $P\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\left(\sqrt{3x}-2\right)$ là ước

$1\Leftrightarrow\sqrt{3x-2}=\pm 1\Leftrightarrow x=3$ hoặc $x=\dfrac{1}{3}$ (loại). Vậy $x\in\{1;3\}$.

Câu 2)

a) Đường thẳng $(d): y=kx-2$

Xét phương trình $\dfrac{-x^2}{2}=kx-2\Leftrightarrow x^2+2kx-4=0\quad(1)$

$\Delta'=k^2+4>0$ với mọi k, suy ra (1) có hai nghiệm phân biệt.
Vậy (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

b) Giả sử (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

Suy ra $A(x_1;y_1), B(x_2;y_2)$ thì $H(x_1;0), K(x_2;0)$

Khi đó $IH^2=x_1^2+4, IK^2=x_2^2+4, KH^2=(x_1-x_2)^2$

Theo định lý Viet thì $x_1x_2=-4$ nên $IH^2+IK^2=x_1^2+x_2^2+8=KH^2$

Vậy tam giác IHK vuông tại I.

Câu 3)

Đặt $x+y=u, xy=v$ (với $v\neq 0$). Hệ đã cho trở thành $\begin{cases} u+\dfrac{u}{v}=\dfrac{9}{2} & (1)\\ v+\dfrac{1}{v}=\dfrac{5}{2} & (2)\end{cases}$.

Phương trình (2) có dạng $2v^2-5v+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} v=2\\ v=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$.

+ Với $v=2$ thay vào PT (1) tìm được $u=3$. Ta có hệ phương trình

$\begin{cases} x+y=3\\ xy=2\end{cases}$ nên x, y là nghiệm của phương trình $X^2-3X+2=0$, tức là

$(x,y)=(1;2),(2;1)$.

+ Với $v=\frac{1}{2}$ thay vào PT (1) tìm được $u=\frac{3}{2}$. Ta có hệ phương trình

$\begin{cases} x+y=\frac{3}{2} \\ xy=\frac{1}{2} \end{cases}$ nên x,y là nghiệm của phương trình $X^2-\frac{3}{2}X+\frac{1}{2}=0$, tức là

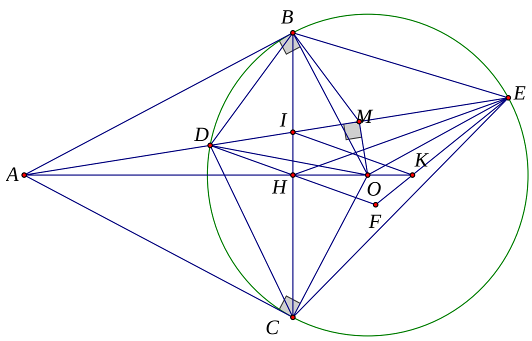
$(x;y)=\left(1;\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2};1\right)$.Từ đó suy ra hệ đã cho có tất cả bốn nghiệm như trên.

Câu 4)

a) $\Delta ABD \sim \Delta AEB$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AB}{AE}=\frac{AD}{AB} \Rightarrow AB^2=AD.AE$.

b) $OMA=90^0$ (định lý đường kính, dây cung) $\Rightarrow M$ thuộc đường tròn đường kính OA (1)**.** Ta có

$ABO=90^0$ (tính chất tiếp tuyến) $\Rightarrow B$ thuộc đường tròn đường



kính OA (2)**.** Ta có $ACO=90^0$ (tính chất tiếp tuyến) $\Rightarrow C$ thuộc đường tròn đường kính OA (3)**.** Từ (1),(2),(3) suy ra 5 điểm A,B,M,O,C cùng thuộc một đường tròn đường kính OA.

c) Mà $AB^2=AD.AE$ (cmt) $\Rightarrow AH.AO=AD.AE \Rightarrow \frac{AH}{AE}=\frac{AD}{AO}$**.** Chứng minh $\Delta AHD \sim \Delta AEO$ (c.g.c) $\Rightarrow AHD=AEO \Rightarrow$ Tứ giác $OHDE$ nội tiếp.

d) Ta có $AHD=AEO$ (cmt), $OHE=ODE$ (tứ giác $OHDE$ nội tiếp);
$AEO=ODE$ (ΔOED cân tại O). Suy ra $AHD=EHO$.

Ta có $AHB + DHB = 90^0$ ($BC \perp OA$ tại H); $EHO + EHB = 90^0$ ($BC \perp OA$ tại H); $AHD = EHD$ (cmt) $\Rightarrow EHB = BHD \Rightarrow HI$ là phân giác EHD

Xét ΔEHD có HI là đường phân giác $\Rightarrow \dfrac{ID}{IE} = \dfrac{HD}{HE}$.Ta có tia HI là tia phân giác EHD; $HI \perp HK$ ($BC \perp OA$ tại H); $EHD = EHF$ là hai góc kề bù $\Rightarrow HK$ là tia phân giác EHF . Xét ΔEHF có HK là đường phân giác $\Rightarrow \dfrac{KF}{KE} = \dfrac{HD}{HE}$. Ta có $\dfrac{ID}{IE} = \dfrac{HD}{HE}$ (cmt); $\dfrac{KF}{KE} = \dfrac{HF}{HE}$ (cmt); $HD = HE$ (H là trung điểm cạnh HF) $\Rightarrow \dfrac{ID}{IE} = \dfrac{KF}{KE}$. Xét ΔEFD có $\dfrac{ID}{IE} = \dfrac{KF}{KE}$ (cmt)

$\Rightarrow IK // DF$ (định lý Ta-lét đảo).

Câu 5) Do $a, b \ge \dfrac{1}{2} \Rightarrow a + b \ge 1 \Rightarrow \dfrac{a+b}{1+c} \ge \dfrac{a+b}{a+b+c}$. Thiết lập hai bất đẳng thức tương tự và cộng chúng lại theo vế, ta được: $\sum \dfrac{a+b}{1+c} \ge \sum \dfrac{a+b}{a+b+c} = 2$.Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \dfrac{1}{2}$. Tiếp theo, ta chứng minh bất đẳng thức vế bên phải. Do $a, b \le 1$ nên $\dfrac{a}{1+c} \le \dfrac{a}{a+c}$; $\dfrac{b}{1+c} \le \dfrac{b}{b+c}$ Từ đó suy ra:

$\sum \dfrac{a+b}{1+c} \le \sum \left(\dfrac{a}{a+c} + \dfrac{b}{b+c} \right) = 3$, với đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

ĐÁP ÁN ĐỀ SỐ 5

Câu 1) $P = \left(\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \dfrac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6} \right) : \left(1 - \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \right)$

a) Điều kiện xác định : $\begin{cases} x \ge 0 \\ x \ne 4 \\ x \ne 9 \end{cases}$

Ta có:

$$P=\left[\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}-\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3}+\frac{\sqrt{x}+2}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}\right]:\left(1-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right)$$

$$=\left[\frac{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-3\right)-\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)+\sqrt{x}+2}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}\right]:\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right)$$

$$=\frac{x-9-\left(x-4\right)+\sqrt{x}+2}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}.\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)}$$

b) Ta có

$$P>0\Leftrightarrow\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)}>0\Leftrightarrow\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)>0\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ \sqrt{x}-2>0\end{cases}\Leftrightarrow x>4.$$

c) Đặt $\sqrt{x}+1=t\geq 1$ thì $\sqrt{x}=t-1$. Ta có:

$$P=\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)}{x-2\left(\sqrt{x}+1\right)+2}=\frac{t}{\left(t-1\right)^2-2t+2}=\frac{t}{t^2-4t+3}\Rightarrow\frac{1}{P}=\frac{t^2-4t+3}{t}=t-4+\frac{3}{t}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có: $t+\frac{3}{t}\geq 2\sqrt{3}\Rightarrow\frac{1}{P}\geq 2\sqrt{3}-4$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $t=\frac{3}{t}\Leftrightarrow t=\sqrt{3}\Leftrightarrow\sqrt{x}+1=\sqrt{3}\Leftrightarrow x=4-2\sqrt{3}$. Vậy GTNN của $\frac{1}{P}$ là $2\sqrt{3}-4$.

Câu 2)

a) Phương trình hoành độ giao điểm của d và $\left(P\right)$ là:

$x^2=\left(m+5\right)x-m\Leftrightarrow x^2-\left(m+5\right)x+m=0$ (1). Ta có:

$\Delta=\left(m+5\right)^2-4m=\left(m+3\right)^2+16>0,\forall m$ Suy ra phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt với mọi m .Vậy d luôn cắt $\left(P\right)$ tại hai điểm phân biệt.

b) Ta có x_1,x_2 là hai nghiệm của (1). Theo định lý Viet, ta có:

$$\begin{cases}x_1+x_2=m+5\\ x_1.x_2=m\end{cases}$$

Ta có:

$M^2=(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=(m+5)^2-4m=(m+3)^2+16\geq 16$.

Do $M>0$ nên $M\geq 4$. Dấu bằng xảy ra khi $m=-3$. Vậy $M_{\min}=4$.

Câu 3) Gọi vận tốc xe máy là x (km/h) Điều kiện $x>0$.

Gọi vận tốc ô tô là y (k,/h). Điều kiện $y>0$.

Thời gian xe máy dự định đi từ A đến B là: $\frac{210}{x}$ giờ. Thời gian ô tô dự định đi từ B đến A là: $\frac{210}{y}$ giờ. Quãng đường xe máy đi được kể từ khi gặp ô tô cho đến khi đến B là : $4x$ (km). Quãng đường ô tô đi được kể từ khi gặp xe máy cho đến khi đến A là : $\frac{9}{4}y$ (km). Theo giả thiết ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}\frac{210}{x}-\frac{210}{y}=4-\frac{9}{4}\\ \frac{9}{4}x+2y=210\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{210}{x}-\frac{210}{y}=\frac{7}{4}\\ 4x+\frac{9}{4}y=210\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{4x+\frac{9}{4}y}{x}-\frac{4x+\frac{9}{4}y}{y}=\frac{7}{4} & (1)\\ 4x+\frac{9}{4}y=210 & (2)\end{cases}$$

Từ phương trình (1) ta suy ra

$\frac{4x+\frac{9}{4}y}{x}-\frac{4x+\frac{9}{4}y}{y}=\frac{7}{4}\Leftrightarrow\frac{9y}{4x}-\frac{4x}{y}=0\Leftrightarrow x=\frac{3}{4}y$. Thay vào phương trình (2) ta thu được: $\frac{12}{4}y+\frac{9}{4}y=210\Leftrightarrow y=40$, $x=30$.

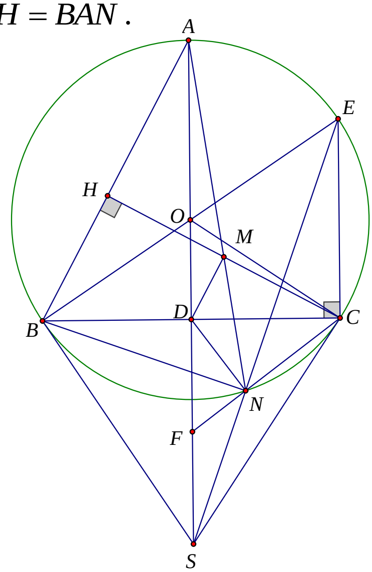
Vậy vận tốc xe máy là 30 km/h. Vận tốc ô tô là 40 km/h.

Câu 4)

a) Ta có MD là đường trung bình của tam giác CBH. Suy ra $CDM=CBA=CNM$ Vậy tứ giác $CMDN$ nội tiếp.

b) Do tứ giác $CMDN$ nội tiếp nên $NDC=NMC=AMH$

Suy ra $SDN = 90^0 - NDC = 90^0 - AMH = BAN$.



Do SB là tiếp tuyến của (O)

nên $BAN = SBN$ .Suy ra

$SDN = SBN$ .Do đó, tứ giác

$SBDN$ nội tiếp. suy ra,

$DSN = DBN = NEC$ .Vậy

CE song song với SA.

c) Gọi F là giao điểm của CN với SD.

Ta có: $FSN = NEC$ (so le) $= NCS$. Suy ra $\Delta FNS \backsim \Delta FSC \Rightarrow FS^2 = FN.FC$ .Xét tam giác vuông DFC có DN là đường cao. Ta có, $FD^2 = FN.FC$. Suy ra $FD^2 = FS^2$ hay F là trung điểm của SD.

Câu 5) Từ phương trình 2 của hệ ta suy ra $x, y \geq 0$. Xét phương trình:

$x^3 + y^3 + 7(x+y)xy = 8xy\sqrt{2(x^2+y^2)}$. Ta có:

$x^3 + y^3 + 7(x+y)xy = (x+y)(x^2+y^2+6xy) = (x+y)\left[(x+y)^2 + 4xy\right]$.

Theo bất đẳng thức Cô si ta có: $(x+y)^2 + 4xy \geq 2\sqrt{(x+y)^2.4xy}$. Suy ra

$x^3 + y^3 + 7(x+y)xy \geq 4\sqrt{xy}(x+y)\sqrt{(x+y)^2} = 4\sqrt{xy}(x+y)^2$. Ta có

$(x+y)^2 = (x^2+y^2) + 2xy \geq 2\sqrt{(x^2+y^2).2xy}$. Suy ra

$x^3 + y^3 + 7(x+y)xy \geq 8xy\sqrt{2(x^2+y^2)}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y$.

Thay vào phương trình (2) ta thu được:

$$\sqrt{x} - \sqrt{2x-3} = 6 - 2x \Leftrightarrow \sqrt{2x-3} - \sqrt{x} = 2(x-3) \Leftrightarrow \frac{(x-3)}{\sqrt{2x-3}+\sqrt{x}} = 2(x-3)$$

Suy ra $x=3$ hoặc: $\sqrt{2x-3}+\sqrt{x}=\frac{1}{2}$ Do $x\geq\frac{3}{2}$ nên pt này vô nghiệm. Tóm lại:

Hệ có nghiệm: $x=y=3$.

ĐÁP ÁN ĐỀ 6

Câu 1) Giải:

Điều kiện: $x\geq -3$

Ta có: (1) $\Leftrightarrow x^2-3x+2x\sqrt{x+3}-4\sqrt{x+3}+6=0 \quad (2)$

Đặt $t=x+\sqrt{x+3}$

Do đó (2) $\Rightarrow t^2-4t+3=0 \Leftrightarrow (t-1)(t-3)=0 \Leftrightarrow t=1; t=3$

Với $t=1$, ta giải phương trình $x+\sqrt{x+3}=1 \Leftrightarrow \sqrt{x+3}=1-x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-x\geq 0 \\ x+3=(1-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 1 \\ x+3=1-2x+x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 1 \\ x^2-3x-2=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 1 \\ \left[\begin{array}{l} x=\frac{3+\sqrt{17}}{2} \\ x=\frac{3-\sqrt{17}}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{3-\sqrt{17}}{2}$$

Với $t=3$, ta giải phương trình $x+\sqrt{x+3}=3 \Leftrightarrow \sqrt{x+3}=3-x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 3 \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=6 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=1$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x=\frac{3-\sqrt{17}}{2}, x=1$.

Câu 2) Lời giải:

Đặt $x=\sqrt{a}, y=\sqrt{b}, z=\sqrt{c}$ thì $x^2+y^2+z^2=x+y+z=2$.

Suy ra $2(xy+yz+zx)=(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)=2^2-2=2$

$\Rightarrow xy+yz+zx=1$.

Do đó: $1+a=xy+yz+zx+x^2=(x+y)(x+z)$;

$1+b=xy+yz+zx+y^2=(y+z)(y+x)$;

$1+c=xy+yz+zx+z^2=(z+x)(z+y)$.

Vì vậy

$$\frac{\sqrt{a}}{1+a}+\frac{\sqrt{b}}{1+b}+\frac{\sqrt{c}}{1+c}=\frac{x}{(x+y)(x+z)}+\frac{y}{(y+z)(y+x)}+\frac{z}{(z+x)(z+y)}$$

$$=\frac{x(y+z)+y(z+x)+z(x+y)}{(x+y)(y+z)(z+x)}=\frac{2(xy+yz+zx)}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{(1+a)(1+b)(1+c)}}.$$

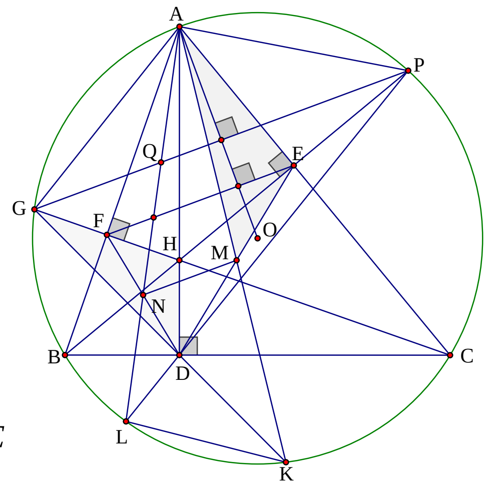
Câu 3) Ta có $a_n=\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n-2=\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)^2$

Xét dãy $S_n=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$, ta chứng minh b_n là một số nguyên.

Xét $x_1=\frac{1-\sqrt{5}}{2}, x_2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ta có $\begin{cases} x_1+x_2=1 \\ x_1.x_2=1 \end{cases}$ suy ra x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình: $x^2-x-1=0$.

Ta có $S_{n+1}=x_1^{n+1}+x_2^{n+1}=\left(x_1^n+x_2^n\right)(x_1+x_2)-x_1x_2\left(x_1^{n-1}+x_2^{n-1}\right)$ hay $S_{n+1}=S_n-S_{n-1}$.

Ta có $S_1 = 1, S_2 = \left(x_1 + x_2\right)^2 - 2x_1x_2 = 3, S_3 = S_2 - S_1 = 2$. Từ đó bằng phép quy nạp ta dễ dàng chứng minh được S_n là số nguyên . Suy ra $a_n = \left(S_n\right)^2$ là số chính phương.



Câu 4)

a) Ta có $AEF + OAE = ABC + \frac{1}{2}\left(180^0 - AOC\right) = 90^0$

Suy ra $OA \perp EF$

b) Việc chứng minh trực tiếp AK đi qua trung điểm của DE là tương đối khó. Để ý đến chi tiết CH cắt đường tròn (O) tại điểm G ta sẽ thấy G, H đối xứng nhau qua AB, hay F là trung điểm GH . Như vậy ta cần tìm mối quan hệ giữa điểm F và điểm M thông qua các tam giác đồng dạng. Xét tam giác DFH và tam giác DAE : Ta thấy $DFH = DBH = DAE$, Ta cũng có $AED = 180^0 - ABD = FHD$ suy ra $\Delta DFH \sim \Delta DAE \Rightarrow \frac{HF}{EA} = \frac{HD}{ED} \Leftrightarrow \frac{2HF}{EA} = \frac{2HD}{ED} \Leftrightarrow \frac{HG}{EA} = \frac{2HD}{ED}$ hay $\frac{HG}{EA} = \frac{HD}{EM}$. Từ đó suy ra $\Delta HGD \sim \Delta EAM \Rightarrow$

$EAM = HGD = CAK \Leftrightarrow AM \equiv AK$.

c) Giả sử BH cắt đường tròn (O) tại điểm P khác B .

Tương tự câu a ta có: P đối xứng với H qua AC. Suy ra $AG = AH = AP$ do đó $GP \perp OA \perp EF$ suy ra $EF//MN//GP$, giả sử AL cắt GP tại Q . Ta có:

$MNA = AQP = AGQ + QAG = APG + QAG = AKG + GKL = AKL$ suy ra tứ giác $MKNL$ nội tiếp.

Câu 5) Để ý rằng: $2xy \le x^2 + y^2$.

Ta lại có: $1 + 2bc = a^2 + (b+c)^2 > 0$; $1 + 2ca = b^2 + (c+a)^2 > 0$;
$1 + 2ab = c^2 + (a+b)^2 > 0$

Nên

$$\frac{a^2}{1+2bc} + \frac{b^2}{1+2ca} + \frac{c^2}{1+2ab} \ge \frac{a^2}{1+b^2+c^2} + \frac{b^2}{1+c^2+a^2} + \frac{c^2}{1+a^2+b^2}$$

$$= \frac{a^2}{1-a^2} + \frac{b^2}{2-b^2} + \frac{c^2}{2-c^2} = -3 + 2\left(\frac{1}{2-a^2} + \frac{1}{2-b^2} + \frac{1}{2-c^2}\right).$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy- Schwarz ta thu được:

$$\frac{1}{2-a^2} + \frac{1}{2-b^2} + \frac{1}{2-c^2} \ge \frac{9}{6-a^2-b^2-c^2} = \frac{9}{5}$$ .Từ đó suy ra:

$$\frac{a^2}{1+2bc} + \frac{b^2}{1+2ca} + \frac{c^2}{1+2ab} \ge -3 + 2.\frac{9}{5} = \frac{3}{5}$$. Chứng minh hoàn tất. đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 6) Vì mỗi số nguyên dương m lẻ không vượt quá 2015, ta xây dựng tập A_m gồm các số dạng $2^k.m$, trong đó $k \in \mathbb{N}$ và $2^k.m \le 2016$**.** Kí hiệu $A_m = \left\{2^k.m \mid k \in \mathbb{N}, 2^k.m \le 2016\right\}$**.** Với cách xây dựng trên, khi $m \ge 1009$ thì A_m chỉ có một phần tử là m. Vì có đúng 1008 số lẻ không vượt quá 2016 nên có đúng 1008 tập A_m. Nhận thấy rằng với n nguyên dương bất kỳ, $1 \le n \le 2016$, ta luôn viết được $n = 2^k.m$ với m là số nguyên lẻ, điều này cho thấy mỗi số nguyên từ 1 đến 2016 đều thuộc vào ít nhất một trong 1008 tập A_m. Nhưng tập M có đúng 1009 phần tử, do đó chắc chắn có hai phần tử của M giả sử là $a, b\,(a < b)$ cùng thuộc một tập A_m nào đó. Khi đó $a = 2^p.m$ và $b = 2^q.m$ với $p < q$, suy ra $\frac{b}{a} = 2^{q-p}$ hay b là bội của a.

ĐỀ SỐ 7

Câu 1) Viết lại phương trình đã cho thành:
$\left(x^2+2x+1\right)^2+\sqrt{x^2+2x+17}=4$. Đặt $t=\sqrt{x^2+2x+17}\geq 4$. Ta có $x^2+2x+1=t^2-16$ và phương trình đã cho được viết thành: $\left(t^2-16\right)^2+t-4=0\Leftrightarrow (t-4)\left[(t-4)(t+4)^2+1\right]=0$. Phương trình $t-4=0$ có nghiệm $t=4$ hay $x^2+2x+1=0\Leftrightarrow x=-1$. Phương trình $(t-4)(t+4)^2+1=0$ vô nghiệm do $t\geq 4$.Vậy phương tình có một nghiệm $x=-1$.

Câu 2) Ta có $6^{2015}=(5+1)^{2015}\equiv 1(\bmod 5)\Rightarrow 6^{2015}=5k+1$ với $k\in Z^+$. Suy ra $A=26^{5m+1}=26.\left(26^5\right)^m$. Mặt khác để ý rằng:
$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$. Nếu
$a\vdots 25\Rightarrow (a+b)^5\equiv b^5(\bmod 125)$ suy ra
$26^5\equiv 1(\bmod 125)\Rightarrow A\equiv 26(\bmod 125)\Rightarrow A=125m+26$. Dễ thấy $A\vdots 8$ suy ra
$125m+26\vdots 8\Rightarrow m$ chẵn
$\Rightarrow m=2r\Rightarrow A=250r+26=248r+24+2(r+1)\Rightarrow r$ chia cho 4 dư $3\Rightarrow r=4p+3$. Hay $A=250(4p+3)+26=1000p+776$. Vậy 3 chữ số tận cùng của A là 776

Câu 3)

a) Ta viết lại phương trình thành: $(x-y)^3+3xy(x-y)=xy+8$

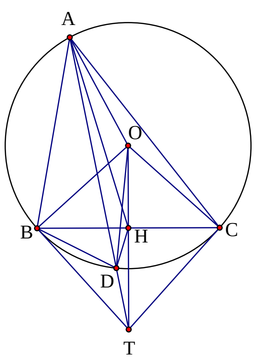
Đặt $\begin{cases} x-y=a \\ xy=b \end{cases}(a,b\in Z)$. Ta có $a^3+3ab=b+8\Leftrightarrow a^3-8=-b(3a-1)$
$\Leftrightarrow a^3-8\vdots(3a-1)\Leftrightarrow 27\left(a^3-8\right)\vdots 3a-1\Leftrightarrow\left(27a^3-1\right)-215\vdots 3a-1$
$\Leftrightarrow 215\vdots 3a-1$. Mặt khác ta có $215=5.43$ suy ra $3a-1=\pm1;\pm5;\pm43;\pm215$.
Cuối cùng ta thay các trường hợp để tìm $a,b\Rightarrow x=2;y=0$ hoặc $x=0;y=-2$.

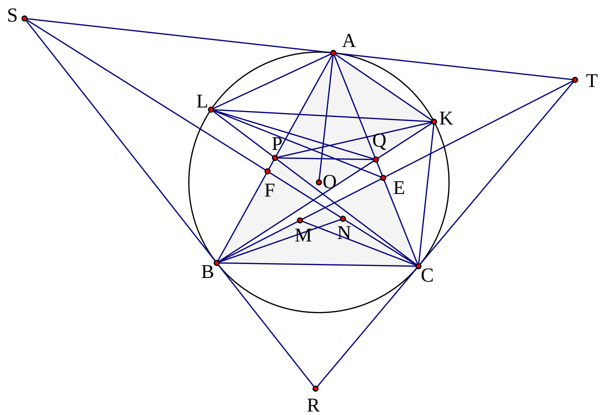
b) Ta có $\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}=\sqrt[3]{\left(2+\sqrt{3}\right)^3}=2+\sqrt{3}$.Do đó $\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}\left(2-\sqrt{3}\right)=\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)=1$. Đặt $a=\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}$ thì ta có:

$a^3=18+3a \Leftrightarrow a^3-3a-18=0 \Leftrightarrow a^3-27-3a+9=0$
$\Leftrightarrow (a-3)\left(a^2+3a+6\right)=0 \Leftrightarrow a=3$ (vì $a^2+3a+6>0$). Vậy

$\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}=3$. Suy ra $x=\dfrac{1}{3}$. Khi đó $P=\left(3x^3-x^2-1\right)^{2016}=1$.

Câu 4) Phân tích định hướng giải:





Ta dễ chứng minh được tính chất sau: Tam giác ABC nội tiếp (O) , các tiếp tuyến tại B và C cắt nhau tại T , AT cắt (O) tại D, OT cắt BC tại H . Khi đó $AHC=ABD$ và $BAT=HAC$. (Xem thêm phần tính chất cát tuyến, tiếp tuyến)

Trở lại bài toán:

+ Áp dụng kết quả bài toán ta có: $\Delta ABK\# \Delta EBC$.

+ Từ kết quả $\Delta ABK\# \Delta EBC$ chú ý rằng: KP, CM lần lượt là trung tuyến của các tam giác $\Delta ABK, \Delta EBC$ nên suy ra $BCM=BKP$ (1) , tương tự $CBN=CLQ$ (2) .

+ Ta có $PLK = QBC = PQB$ (do $KLBC$ nội tiếp và $PQ//BC$). Từ đó suy ra tứ giác $PQKL$ nội tiếp nên ta có: $BKP = CLQ$ (3).

Từ (1), (2), (3) ta có: $BCM = CBN$.

Câu 5)

a) Ta có: $x_1^2 + x_2^2 + x_2^3 + ... + x_n^2 + n^3 \le (2n-1)(x_1 + x_2 + ... + x_n) + n^2$

$\Leftrightarrow \left[x_n^2 - (2n-1)x_n + n^2 - n\right] + \left[x_2^2 - (2n-1)x_2 + n^2 - n\right] + ... + \left[x_n^2 - (2n-1)x_n + n^2 - n\right.$

$\Leftrightarrow (x_1 - n)(x_1 - n + 1) + (x_2 - n)(x_2 - n + 1) + ... + (x_n - n)(x_{n+1} - n + 1) \le 0$

Mặt khác $(x_k - n)\left[x_k - (n-1)\right]$ là tích của hai số nguyên liên tiếp nên không âm, do đó $x_k = n$ hoặc $x_k = n-1$. Do $n \ge 2$ nên x_k là số nguyên dương.

b) Vì $x_k \in \{n; n-1\}$ nên $n(n-1) \le x_1 + x_2 + ... + x_n \le n^2$

Do đó $n^2 < 1 + n^2 \le 1 + n + x_1 + x_2 + ... + x_n \le n^2 + n + 1 < (n+1)^2$

Suy ra $x_1 + x_2 + ... + x_n + 1 + n$ nằm giữa hai số chính phương liên tiếp nên không là số chính phương.

ĐỀ SỐ 8

Câu 1)

Điều kiện $x \ge 0$.

Phương trình tương đương với:

$$x + 9 = x + \frac{8}{x+1} + \frac{4\sqrt{2x}}{\sqrt{x+1}} \Leftrightarrow \frac{9x+1}{x+1} - \frac{4\sqrt{2x}}{\sqrt{x+1}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{8x}{x+1} - \frac{4\sqrt{2x}}{\sqrt{x+1}} + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{2\sqrt{2x}}{\sqrt{x+1}} - 1\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sqrt{2x}}{\sqrt{x+1}} = 1 \Leftrightarrow 8x = x + 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{7} \text{ (thỏa mãn).}$$

Câu 2) Ta có: $x^3+2y^2-6y+11=0 \Leftrightarrow x^3=-3(y-1)^2-8\le -8 \Rightarrow x\le -2$ (1). $x^2+y^2(x^2-3)-2y-3=0 \Leftrightarrow x^2(y^2+1)=3(y^2+1)+2y$

$\Leftrightarrow x^2=3+\dfrac{2y}{y^2+1}\le 4 \Leftrightarrow -2\le x\le 2$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $x=-2$, khi đó $y=1$. Do đó $x^3+y^2=-7$.

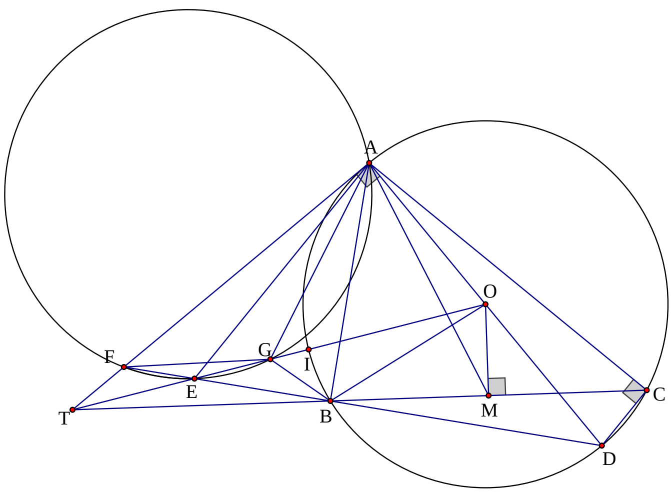
Câu 3) Giả sử số tự nhiên n thỏa mãn đề bài. Khi đó tồn tại số nguyên dương k sao cho

$$2^{2012}+2^{2015}+2^n=k^2 \Leftrightarrow 9.2^{2012}+2^n=k^2 \Leftrightarrow \left(k+3.2^{1006}\right)\left(k-3.2^{1006}\right)=2^n.$$

Suy ra $\begin{cases} k+3.2^{1006}=2^a \\ k-3.2^{1006}=2^b \\ a,b\in \mathbb{N}, a+b=n \end{cases} \Rightarrow 2^a-2^b=3.2^{1007}$ hay $2^{b-1}\left(2^{a-b}-1\right)=3.2^{1006}$.

Suy ra $\begin{cases} b-1=1006 \\ 2^{a-b}-1=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1007 \\ a=1009 \end{cases} \Rightarrow n=2016$.

Câu 4)



a). Ta có : Tứ giác $AOMT$ nội tiếp nên : $AOT = AMT$ suy ra

$EOD = AMC$ (cùng bù với 2 góc bằng nhau) .

b). Ta thấy rằng: $\Delta AMC \# \Delta EOD$ (g. g) suy ra $\frac{AC}{ED} = \frac{MC}{OD} = \frac{2MC}{2OD} = \frac{BC}{AD}$

suy ra $\Delta EAD \# \Delta ABC$ nên $EAD = ABC$, tam giác ABC nhọn suy ra O nằm trong tam giác suy ra $ABC = ADC$ (cùng chắn cung AC). Từ đó suy ra $EAD = ADC$ suy ra $AE / /CD$ và suy ra $AE \perp AC$.

c). Từ chứng minh trên ta có: $FAE = TAC - 90^0 = DAC$. Suy ra $FGT = FAE = DAC = DBC = FBT$ hay tứ giác $FGBT$ nội tiếp nên $TGB = TFB = EGA$ suy ra GO là phân giác của góc AGB . Gọi I là giao điểm của GO với (O) . Ta có $OA = OB$ nên $AGBO$ nội tiếp. Mặt khác $OA = OB = OI$ nên I là tâm vòng tròn nội tiếp tam giác ABG .

Chú ý: Trong phần chứng minh ta đã sử dụng bổ đề sau: ‘’Cho tam giác ABC nội tiếp (O) , ngoại tiếp (I) . Đường thẳng AI cắt (O) tại D thì $DI = DB = DC$ ’’ Phần chứng minh dành cho các em học sinh.

Câu 5) Nhận xét rằng trong tập hợp X có 34 phần tử, các phần tử đều có dạng $3n+1$ với $n = 0,1,2,...,33$. Trước hết, ta tìm các cặp hai phần tử phân biệt trong X là $3n+1, 3m+1$ sao cho $3n+1+3m+1 = 104 \Leftrightarrow m+n = 34$

Với $n = 0$ thì $m = 34 > 33$. Với $n = 17$ thì $m = 17$ suy ra hai phần tử bằng nhau.

Loại trừ hai phần tử trên, 32 phần tử còn lại cho ta 16 cặp hai phần tử phân biệt $3n+1, 3m+1$ thỏa mãn $n+m = 34$ đó là

$(4;100),(7;97),(10;94),...,(49;55)$ (*)

Nếu ta lấy ra 19 số bất kỳ từ tập X thì có thể xảy ra một trường hợp “xấu” nhất là 16 số mà mỗi số thuộc vào 16 cặp ở (*) và thỏa mãn $n+m = 34$. Vì tập con A có 19 phần tử nên nó thỏa mãn bài toán (đpcm).

ĐÁP ÁN ĐỀ SỐ 9.

Câu 1) Ta có

$x\sqrt{1-2y^2} \le \dfrac{x^2+1-2y^2}{2}$; $y=\sqrt{4-6z^2}=\sqrt{2}y\sqrt{2-3z^2} \le \dfrac{2y^2+2-3z^2}{2}$;

$z\sqrt{15-3x^2}=\sqrt{3}z\sqrt{5-x^2} \le \dfrac{3z^2+5-x^2}{2}$. Suy ra

$4=x\sqrt{1-2y^2}+y\sqrt{4-6z^2}+z\sqrt{15-3x^2} \le$

$\dfrac{x^2+1-2y^2}{2}+\dfrac{2y^2+2-3z^2}{2}+\dfrac{3z^2+5-x^2}{2}=4$. Điều này tương đương với

hệ: $\begin{cases} \sqrt{1-2y^2}=x \\ \sqrt{2-3z^2}=\sqrt{2}y \\ \sqrt{5-x^2}=\sqrt{3}z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2y^2=x^2 \\ 2-3z^2=2y^2 \\ 5-x^2=3z^2 \end{cases}$. Cộng theo vế ba đẳng thức trên ta

được $P=x^2+2y^2+3z^2=4$.

Câu 2) Trước hết ta có nhận xét: Với mọi số nguyên $n>1$ thì

$\dfrac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}<\dfrac{1}{\sqrt{n}}<\dfrac{2}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}$. Áp dụng vào bài toán ta có:

$$1+2\left(\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+...+\frac{1}{\sqrt{2016^2}+\sqrt{2016^2+1}}\right)<A \text{ và}$$

$$1+2\left(\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{2016^2-1}+\sqrt{2016^2}}\right)>A.$$ Mặt khác ta

cũng có: $\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ từ đó suy ra

$$1+2\left(\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+...+\frac{1}{\sqrt{2014^2}+\sqrt{2016^2+1}}\right)=1+2\left(\sqrt{2016^2+1}-\sqrt{2}\right)$$

và

$$1+2\left(\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{2016^2-1}+\sqrt{2016^2}}\right)=1+2\left(\sqrt{2016^2}-1\right).$$

Do đó $1+2\left(\sqrt{2016^2+1}-\sqrt{2}\right)<A<1+2\left(\sqrt{2016^2}-1\right) \Leftrightarrow 4030<A<4031$

vậy $[A]=4030$.

Câu 3)

a) Từ phương trình (2) ta có:

$7x^3+3xy(3x+y)=1+3(x+y)(x+y+1)$

Hay $7x^3+3xy(4x+2y-x-y)=1+3(x+y)(x+y+1)$

$\Leftrightarrow 8x^3+y^3+6xy(2x+y)=x^3+y^3+3xy(x+y)+3(x+y+1)(x+y).1+1$

$\Leftrightarrow (2x+y)^3=(x+y+1)^3 \Rightarrow 2x+y=x+y+1 \Rightarrow x=1$. Thay vào phương trình đầu tìm được nghiệm của hệ là: $(x;y)=(1;1),(1;-4)$.

b) Giả sử $(a,b)=d \Rightarrow \begin{cases} a=dx \\ b=dy \\ (x,y)=1 \end{cases}$.

Theo giả thiết ta có: $\dfrac{ab(a+b)}{a^2+ab+b^2}\in Z \Leftrightarrow \dfrac{xy(x+y)d}{x^2+xy+y^2}\in Z$. Mặt khác ta dễ dàng chứng minh được:

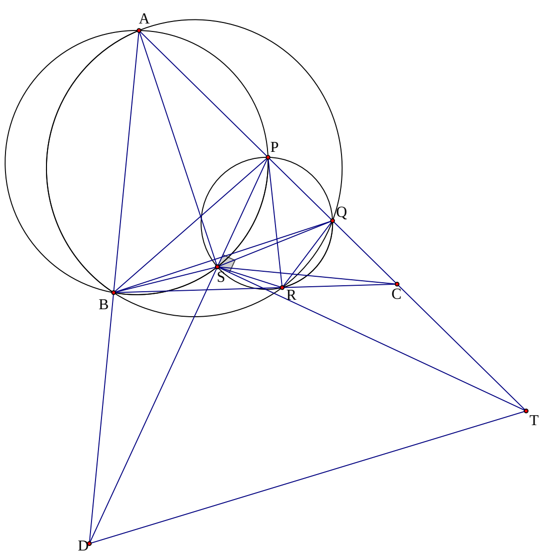
$(x^2+xy+y^2,x)=1;(x^2+xy+y^2,y)=1;(x^2+xy+y^2,x+y)=1;(y^2,x)=1$

suy ra

$d \vdots x^2+xy+y^2 \Rightarrow d\ge x^2+xy+y^2 \Rightarrow |a-b|^3=d^3|x-y|^3\ge d^3$

$\ge d^2(x^2+xy+y^2)>d^2.xy=ab$ hay $|a-b|>\sqrt[3]{ab}$.

Câu 4) Phân tích định hướng giải.



a). Từ giả thiết

$\dfrac{PC}{PA}=\dfrac{QC}{QP}\Rightarrow \dfrac{PC}{PA+PC}=\dfrac{QC}{QP+QC}$

$\Leftrightarrow \dfrac{PC}{AC}=\dfrac{QC}{PC}\Leftrightarrow PC^2=CA.CQ$.

Mặt khác do tứ giác $AQRB$ nội

tiếp nên $CA.CQ = CR.CB$.Từ đó suy ra $PC^2 = CR.CB$.

Hay PC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác PBR.

b). Từ chứng minh trên ta suy ra $APB = PRB$,Ta có

$ABP = 180^0 - BAP - APB = BRQ - BRP = PRQ$ $ASP = ABP = PRQ = PSQ$

nên SP là phân giác trong của góc ASQ. Dựng đường thẳng qua SP cắt

AC tại T thì ST là phân giác ngoài góc ASQ. Ta có

$\frac{TQ}{TA} = \frac{PQ}{PA} = \frac{CQ}{CP} = \frac{PQ+CQ}{PA+CP} = \frac{CP}{AC} = \frac{TQ-CQ}{TA-CP} = \frac{TC}{CT+AP}$ suy ra

$CP\left(CT+AP\right) = CT.AC = CT(AP+PC) \Rightarrow CP.AP = CT.AP \Leftrightarrow CP = CT$

hay C là trung điểm của PT. Vậy tam giác CSP cân tại C.

c). Ta có $CS^2 = CP^2 = CQ.CA = CR.CB$ suy ra

$SRC = BSC = BSD + DSC = BAP + APS = 180^0 - BDS$. Hay

$BDS = 180^0 - SRC = SRB$. Vậy tứ giác $BSRD$ nội tiếp. Suy ra điều phải chứng minh.

Câu 6) Với $k \in \mathbb{N}^*$, ta có $\left(n+k\right)\left(n-k-1\right) = n^2 + n - k^2 + k \le n\left(n+1\right)$

Lấy tích từ $k = 1$ đến m ta được $\frac{\left(n+m\right)!}{\left(n-m\right)!} \le \left(n+1\right)^m .n^m$ (1)

Ta có $n + k \ge 2k$, với mọi $k = 1, 2, ..., m$. Lấy tích từ $k = 1$ đến m, ta được

$\frac{\left(n+m\right)!}{n!} \ge 2^m.m!$

Mặt khác vì $n \ge m \ge 1$ nên $n! \ge \left(n-m\right)!$ suy ra $\frac{\left(n+m\right)!}{\left(n-m\right)!} \ge \frac{\left(n+m\right)!}{n!}$.

Do đó $\frac{\left(n+m\right)!}{\left(n-m\right)!} \ge 2^m.m$ (2)

Từ (1) và (2) ta có đpcm.

ĐỀ SỐ 10

Câu 1) Đặt $y=x-5, z=\sqrt{45-2x}$ ta có $y\ge 0, z\ge 0$.

Từ phương trình đã cho ta có hệ phương trình: $\begin{cases} y^2=35-2z \\ z^2=35-2y \end{cases}$ (*)

Trừ từng vế hai phương trình của hệ ta được

$y^2-z^2=2y-2z \Leftrightarrow (y-z)(y+z-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y+z=2 \\ y=z \end{array}\right.$

Với $y=z$ thay vào phương trình đầu của hệ (*) ta được:

$y^2+2y=35 \Leftrightarrow (y+1)^2=36 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=5 \\ y=-7 \end{array}\right.$

Vì $y\ge 0$ nên $y=5$ suy ra $x=10$ thỏa mãn phương trình đã cho.

Với $y+z=2 \Leftrightarrow z=2-y$, thay vào phương trình đầu của hệ (*) ta được

$y^2=35-4+2y \Leftrightarrow (y-1)^2=32 \Leftrightarrow y=1\pm 4\sqrt{2}$

Vì $y\ge 0$ nên $y=1+4\sqrt{2}$ suy ra $z=1-4\sqrt{2}<0$. Do đó hệ (*) vô nghiệm

Vậy phương trình có nghiệm $x=10$.

Câu 2) Để ý ta thấy: $A=2^{2^{2n+1}}+3=2^{2.4^n}+3$ ta có $4^n=3k+1$ nên suy ra:

$A=2^{2^{2n+1}}+3=2^{2.4^n}+3=2^{2(3k+1)}+3=4.64^k+3$ do

$64^k=(63+1)^k\equiv 1(\bmod 7)\Rightarrow A\equiv 0(\bmod 7)$. Mặt khác ta có:

$A=2^{2.4^n}+3>2^8+3>7$. Suy ra $A=2^{2^{2n+1}}+3$ là hợp số.

Câu 3)

Vì $\sqrt{2}+\sqrt{3}\in A$ nên theo tính chất c) ta có: $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2\in A \Leftrightarrow 5+2\sqrt{6}\in A$.

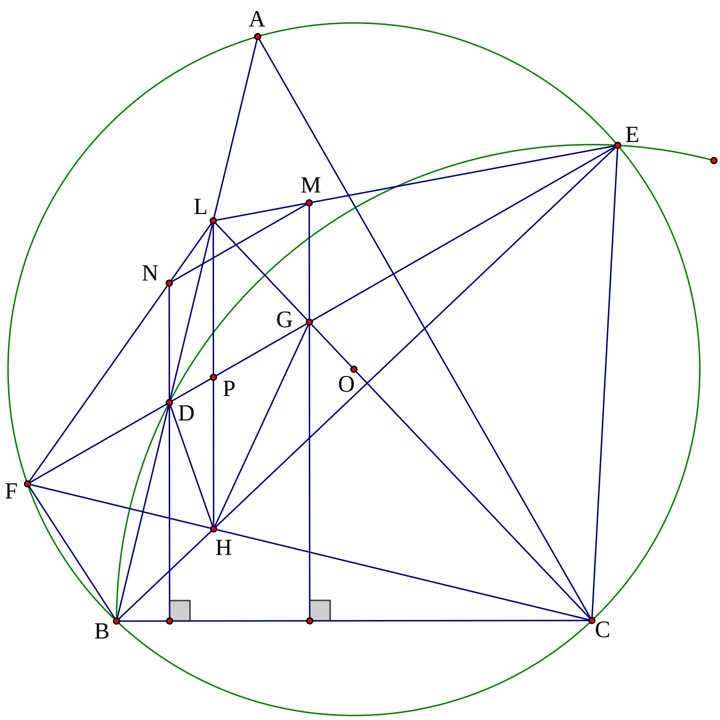
Mặt khác theo tính chất a) có $(-5)\in A$ nên $(-5)+5+2\sqrt{6}=2\sqrt{6}\in A$

Khi đó $2\sqrt{6}\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}=6\sqrt{2}+4\sqrt{3}\in A\Rightarrow -6\sqrt{2}-4\sqrt{3}\in A\right)$

Ta có $5\sqrt{2}+5\sqrt{3}\in A$, suy ra $\left(-6\sqrt{2}-4\sqrt{3}\right)+5\sqrt{2}+5\sqrt{3}=\sqrt{3}-\sqrt{2}\in A$

Do đó $\sqrt{3}-\sqrt{2}=\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\in A$ (đpcm).

Câu 4)



a). Ta có $FCB=FEB=\frac{1}{2}BCD$ suy ra CF là phân giác của góc BCD và $CF\perp BD$. Nên $HCD=HCB=HED$ nên tứ giác $CHDE$ nội tiếp

b). Vì tứ giác $CHDE$ nội tiếp nên $HEB=HDC=HBC$ và $\left(O\right)$ và $\left(C\right)$ cắt nhau theo dây cung BE nên suy ra B,E đối xứng qua OC suy ra $BDC=CBD=LEC$ suy ra tứ giác $CELD$ nội tiếp nên 5 điểm C,E,L,D,H

cùng nằm trên một đường tròn (x). Ta có: $HLG = HEC = CBE = CFE$ suy ra $HGLF$ nội tiếp đường tròn (y).

c). Ta thấy điểm H là trực tâm của tam giác BCL và LH là trục đẳng phương của hai đường tròn $(x),(y)$ nên LH cắt EF tại P thì

$PG.PF = PD.PE$ suy ra $\frac{PG}{PE} = \frac{PD}{PF}$. Mặt khác $GM//DN//PL$ nên

$\frac{LM}{LE} = \frac{PG}{PE} = \frac{PD}{PF} = \frac{LN}{LF}$ suy ra $MN//EF$ nên tứ giác $GMND$ là hình bình hành. Từ đó suy ra $DN = MG$.

Câu 5) Ta có

$$\left[(a-1)(b-1)(c-1)\right]^2 = \left[(a-1)(b-1)\right]\left[(b-1)(c-1)\right]\left[(c-1)(a-1)\right] \geq 0$$

Suy ra trong ba số $a-1, b-1, c-1$ luôn tồn tại hai số có tích không âm.

Không mất tính tổng quát, giả sử $(b-1)(c-1) \geq 0$, suy ra $b + c \leq 1 + bc$.

Do đó $abc + 2 = bc + a(b+c) \leq bc + a(bc+1)$ hay $a + bc \geq 2$.Sử dụng BĐT Cauchy $b^2 + c^2 \geq 2bc$ và $a + bc \geq 2$, ta có:

$$a^2 + b^2 + c^2 + abc - 4 \geq a^2 + 2bc + abc - 4 = (a+2)(a+bc-2) \geq 0$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

HẾT