Đáp án chính thức môn Toán kỳ thi THPT quốc gia 2016

Câu I (1,0 *điểm*):

1. Cho số phức $z = 1 + 2i$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $w = 2z + \overline{z}$

2. Cho $\log_2 x = \sqrt{2}$. Tính giá trị của biểu thức $A = \log_2 x^2 + \log_{\frac{1}{2}} x^3 + \log_4 x$.

Lời giải:

1. Ta có $w = 2z + \overline{z} = 2(1+2i) + (1-2i) = 3 + 2i$.

Vậy phần thực của w là 3 và phần ảo của w là 2.

2. ĐK: $x > 0$.

Ta có $A = \log_2 x^2 + \log_{\frac{1}{2}} x^3 + \log_4 x = 2\log_2 x - 3\log_2 x + \frac{1}{2}\log_2 x = -\frac{1}{2}\log_2 x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $A = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu II (1,0 *điểm*): Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = -x^4 + 2x^2$.

Lời giải:

+) TXĐ: $D = \mathbb{R}$.
+) Giới hạn và sự biến thiên:
$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(-x^4 + 2x^2\right) = -\infty$.
Ta có: $y' = -4x^3 + 4x$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm 1$.
BBT:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		+		-		+		-	
y	$-\infty$ $-\infty$	↗	1	↘	0	↗	1	↘	

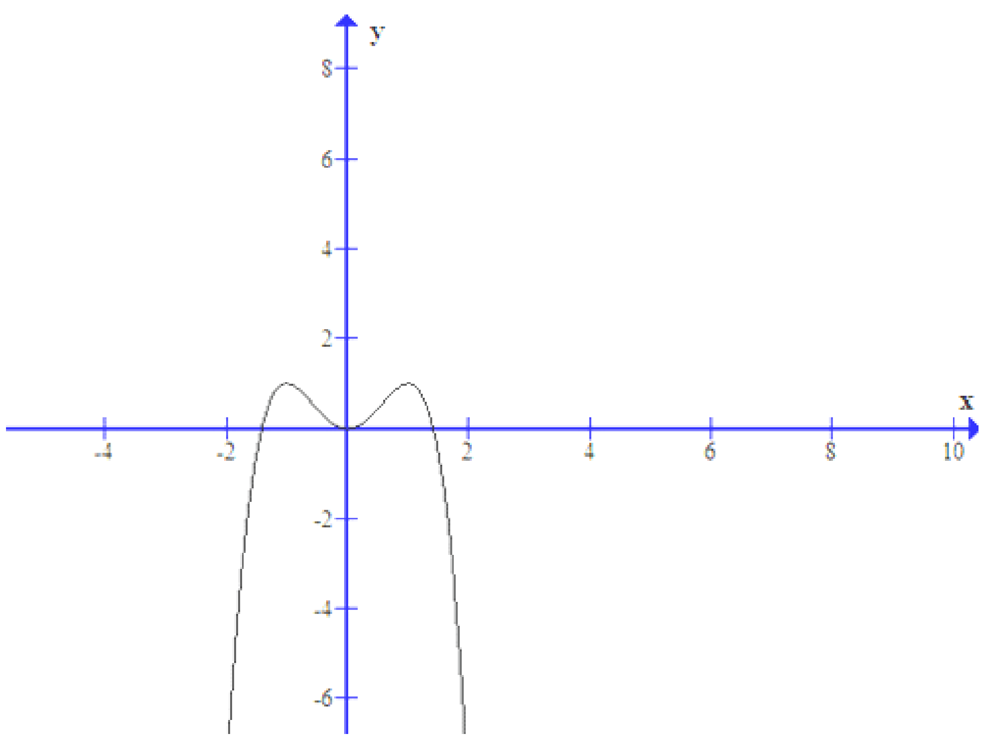
Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(0;1)$.

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.

Hàm số đạt cực đại tại $x = \pm 1$, $y_{cđ} = 1$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$, $y_{ct} = 0$.

+) Đồ thị: Đồ thị hàm số nhận trục tung là trục đối xứng.



Câu III (1,0 điểm): Tìm m để hàm số $f(x)=x^3-3x^2+m-1$ có hai điểm cực trị. Gọi x_1, x_2 là hai điểm cực trị đó, tìm m để $x_1^2+x_2^2=3$.

Lời giải:

Đặt $f(x)=x^3-3x^2+mx-1$.

TXĐ: $D=\mathbb{R}$; $f'(x)=3x^2-6x+m$.

Hàm số có 2 cực trị $\Leftrightarrow$ Phương trình $f'(x)=0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta'=9-3m>0 \Leftrightarrow m<3$.

Khi đó gọi 2 nghiệm là $x_1; x_2$. Theo định lí Vi- ét ta có $\begin{cases} x_1+x_2=2 \\ x_1.x_2=\dfrac{m}{3} \end{cases}$.

Để $x_1^2+x_2^2=3 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-2x_1x_2=3 \Leftrightarrow 4-\dfrac{2m}{3}=3 \Leftrightarrow m=\dfrac{3}{2}$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy $m=\dfrac{3}{2}$ là giá trị cần tìm.

Câu IV (1,0 điểm): Tính tích phân $I=\int_0^3 3x\left(x+\sqrt{x^2+16}\right)dx$.

Lời giải:

Ta có $I=\int_0^3 3x^2dx+\int_0^3 3x\sqrt{x^2+16}dx=A+B$.

- $A=\int_0^3 3x^2dx=x^3\Big|_0^3=27$.
- $B=\int_0^3 3x\sqrt{x^2+16}dx=\int_0^3 \dfrac{3}{2}\sqrt{x^2+16}\,d\left(x^2+16\right)$

$$=\frac{3}{2}\int_0^3\left(x^2+16\right)^{\frac{1}{2}}d\left(x^2+16\right)=\frac{3}{2}.\frac{\left(x^2+16\right)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\Bigg|_0^3=61.$$

Do đó $I=A+B=27+61=88$.

Đ/s: $I=88$

Câu V (*1,0 điểm*): Trong không gian với tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(3;2;-2)$, $B(1;0;1)$, $C(2;-1;3)$. Viết phương trình mặt phẳng đi qua A và vuông góc với BC. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của A trên đường thẳng BC.

Lời giải:

+) Ta có $\overrightarrow{BC}=(1;-1;2)$. Mặt phẳng đi qua A và vuông với BC nhận $\overrightarrow{BC}=(1;-1;2)$ làm một véc tơ pháp tuyến nên có phương trình là (P) : $(x-3)-(y-2)+2(z+2)=0 \Leftrightarrow x-y+2z+3=0$

+) Đường thẳng BC có phương trình là $\begin{cases} x=1+t \\ y=-t \\ z=1+2t \end{cases}$

Gọi $H(1+t;-t;1+2t)\in(BC)$, để H là hình chiếu của A lên BC thì $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0$

Mà $\overrightarrow{AH}=(t-2;-t-2;3+2t)$, do đó ta có phương trình $t-2+t+2+2(3+2t)=0 \Leftrightarrow 6t+6=0 \Leftrightarrow t=-1$

Từ đó suy ra $H(0;1;-1)$

Câu VI (*1,0 điểm*):

1. Giải phương trình $2\sin^2 x+7\sin x-4=0$.

2. Học sinh A thiết kế bảng điều khiển điện tử mở cửa phòng học của lớp mình. Bảng gồm10 nút, mỗi nút được ghi một số từ 0 đến 9 và không có hai nút nào được ghi cùng một số. Để mở cửa cần nhấn liên tiếp 3 nút khác nhau sao cho 3 số trên 3 nút đó theo thứ tự đã nhấn tạo thành một dãy số tăng và có tổng bằng 10. Học sinh B không biết quy tắc mở cửa trên, đã nhấn ngẫu nhiên liên tiếp 3 nút khác nhau trên bảng điều khiển. Tính xác suất để B mở được cửa phòng học đó.

Lời giải:

1. Ta có $2\sin^2 x+7\sin x-4=0 \Leftrightarrow (2\sin x-1)(\sin x+4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x=\frac{1}{2}(tm) \\ \sin x=-4(loai) \end{array}\right.$

Với $\sin x=\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{6}+k2\pi \\ x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. (k\in Z)$

Vậy $\left[x=\frac{\pi}{6}+k2\pi; x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi, (k\in \mathbb{Z}) \right.$ là nghiệm của phương trình đã cho.

2. Nhấn liên tiếp 3 nút khác nhau ta có : $|\Omega| = 10.9.8 = 720$ cách nhấn.

Gọi X là biến cố : 'Học sinh B mở được cửa phòng'.

Các dãy số tăng có tổng bằng 10 là : $(0;1;9);(0;2;8);(0;3;7);(0;4;6);(1;2;7);(1;3;6);(1;4;5);(2;3;5)$.

Học sinh B có $|\Omega_X| = 8$ cách để mở được cửa phòng. (vì với mỗi bộ số thì chỉ có duy nhất một cách chọn dãy số tăng)

Do đó xác suất cần tìm của bài toán là : $P_X = \dfrac{8}{720} = \dfrac{1}{90}$.

Câu VII (1,0 *điểm*): Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AC = 2a$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của AC, đường thẳng $A'B$ tạo với đáy (ABC) góc 45^0. Tính theo a thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và chứng minh $A'B \perp B'C$.

Lời giải:

Do tam giác ABC vuông cân tại B có $AC = 2a$ do đó $AB = BC = a\sqrt{2}$. Gọi H là trung điểm của AC. Do $A'B$ tạo với đáy một góc 45^0 nên $\widehat{A'BH} = 45^0$.

Lại có $BH = \dfrac{1}{2}AC = a \Rightarrow A'H = a$.

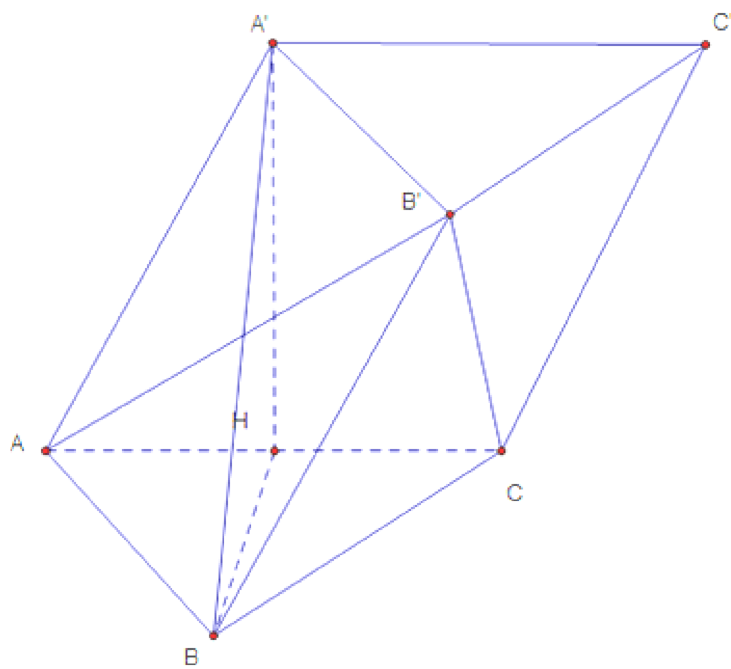
Do đó $V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC}.A'H = a^3$.

Lại có: $A'B = \sqrt{A'H^2 + BH^2} = a\sqrt{2}$

Khi đó: $A'B' = B'B = a$, $A'B = a\sqrt{2}$ do đó $A'B'BA$ là hình vuông.

Suy ra $A'B \perp AB'$ (1).

Mặt khác $\begin{cases} AC \perp A'H \\ AC \perp BH \end{cases} \Rightarrow AC \perp A'B$ (2)



Từ (1) và (2) suy ra $A'B \perp (AB'C) \Rightarrow A'B \perp B'C$ (đpcm).

Câu VIII (1,0 *điểm*): Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn đường kính BD. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên các đường thẳng BC, BD và P là giao điểm của hai đường thẳng MN, AC. Biết đường thẳng AC có phương trình $x - y - 1 = 0$, $M(0; 4)$, $N(2; 2)$ và hoành độ điểm A nhỏ hơn 2. Tọa độ các điểm P, A và B.

Lời giải:

Cách 1: Chứng minh tam giác PAM cân tại P.

Ta có: $\widehat{PMA} = \widehat{ABD}$ (do tứ giác $AMBN$ nội tiếp).

Lại có: $\widehat{ABD} = \widehat{ACD}$ (do tứ giác $ABCD$ nội tiếp).

Mặt khác $\widehat{ACD} = \widehat{PAM}$ (do $CD // AM$ vì cùng vuông góc với BC)

Do vậy tam giác PAM cân tại P.

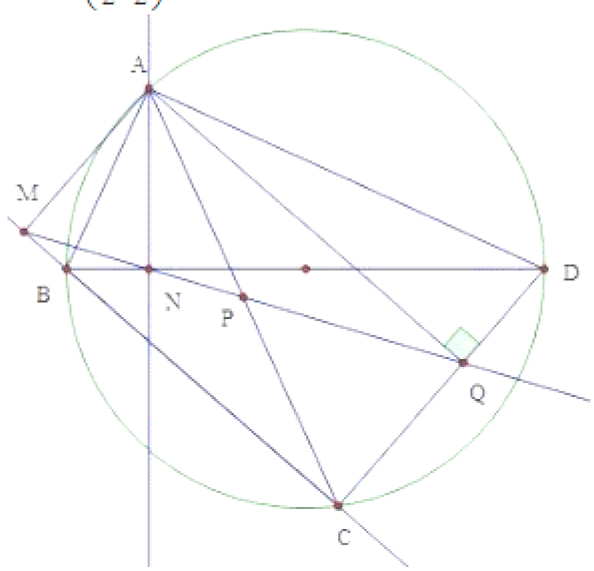
Cách 2: Gọi Q là hình chiếu vuông góc của A lên CD. Ta chứng minh 3 điểm M,N,Q thẳng hàng. Thật vậy ta có: $\widehat{MNB} = \widehat{MAB}$ (do tứ giác $AMBN$ nội tiếp)

Mặt khác $\widehat{QND} = \widehat{QAD}$ (tứ giác $ANQD$ nội tiếp).

Lại có: $\widehat{MAB} = \widehat{QAD}$ (do tứ giác $ABCD$ nội tiếp) suy ra $\widehat{MNB} = \widehat{QND}$ hay 3 điểm MNQ thẳng hàng suy ra $AMCQ$ là hình chữ nhật do có 3 góc vuông.

Gọi $A(t;t-1)$. Ta có tứ giác $AMCQ$ là hình chữ nhật khi đó điểm P là trung điểm của AC và MQ.

Ta có : $MN: x + y - 4 = 0$, suy ra $P\left(\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right)$.



Ta có: $PM = PA = \frac{1}{2}AC$. Do vậy $2\left(t-\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=5 \\ t=0 \end{array}\right.$

Do điểm A có hoành độ nhỏ hơn 2 do vậy $A(0;-1)$, suy ra $Q(5;-1)$; $C(5;4)$

Khi đó phương trình đường thẳng CD.

Lại có $CD: x = 5 \Rightarrow BC: y = 4$

Đường thẳng BD qua N và vuông góc với AN có phương trình là: $BD: 2x + 3y - 10 = 0$

Suy ra $B(-1;4)$.

Vậy $P\left(\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right); A(0;-1); B(-1;4)$.

Câu IX (1,0 *điểm*): Giải phương trình

$$3\log_3^2(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})+2\log_{\frac{1}{3}}\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right).\log_3(9x^2)+\left(1-\log_{\frac{1}{3}}x\right)^2=0$$

Lời giải:

ĐK: $0<x\le 2$ (*)

Khi đó phương trình đã cho

$$\Leftrightarrow 3\log_3^2\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)-2\log_3\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)\left[2+2\log_3 x\right]+\left(1+\log_3 x\right)^2=0.$$

Đặt $\log_3\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)=a,$ ta có $\log_3 x=b.$

Do đó $3a^2-2a(2+2b)+(1+b)^2=0\Leftrightarrow 3a^2-2a(2+2b)+(1+b)^2=0$

$$\Leftrightarrow 3a^2-4a(b+1)+(b+1)^2=0\Leftrightarrow (a-b-1)(3a-b-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=b+1\\3a=b+1\end{array}\right.$$

- TH1. $a=b+1\Rightarrow\log_3\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)-\log_3 x=1$

$$\Leftrightarrow\log_3\left(\frac{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}{x}\right)=1\Leftrightarrow\frac{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}{x}=3$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}=3x\Leftrightarrow\begin{cases}0<x\le 2\\4+2\sqrt{4-x^2}=9x^2\end{cases}$$

Đặt $t=\sqrt{4-x^2}\ge 0\Rightarrow x^2=4-t^2\Rightarrow 4+2t=9\left(4-t^2\right)\Leftrightarrow 9t^2+2t-32=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-2\\t=\frac{16}{9}\end{array}\right.$

Do $t\ge 0\Rightarrow t=\frac{16}{9}\Rightarrow x^2=4-\left(\frac{16}{9}\right)^2\Rightarrow x=\pm\frac{2\sqrt{17}}{9}$ mà $0<x\le 2$ nên $x=\frac{2\sqrt{17}}{9}$ thỏa mãn (*)

- TH2. $3a=b+1\Rightarrow\log_3\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)^3=\log_3 x+1$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)^3=3x\Leftrightarrow\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}=\sqrt[3]{3x}\Rightarrow 4+2\sqrt{4-x^2}=\sqrt[3]{9x^2}.$$

Ta có $4+2\sqrt{4-x^2}\ge 4\Rightarrow\sqrt[3]{9x^2}\ge 4\Rightarrow x^2\ge\frac{64}{9}>4\Rightarrow$ Loại

Đ/s: $x=\frac{2\sqrt{17}}{9}$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Câu X (1,0 *điểm*): Xét các số thực *x*, *y* thỏa mãn $x+y+1=2\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{y+3}\right)$. (*)

1. Tìm giá trị lớn nhất của $x+y$

2. Tìm *m* để $3^{x+y-4}+(x+y+1).2^{7-x-y}-3\left(x^2+y^2\right)\le m$ đúng với mọi *x*, *y* thỏa mãn (*)

Lời giải:

1. Áp dụng bất đẳng thức Bunhacopxki, ta có $\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{y+3}\right)^2\le 2(x-2+y+3)=2(x+y+1)$.

Khi đó $\left(\dfrac{x+y+1}{2}\right)^2\le 2(x+y+1)\Leftrightarrow (x+y+1)^2\le 8(x+y+1)\Leftrightarrow (x+y+1)(x+y-7)\le 0$.

$\Leftrightarrow x+y\le 7$. Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức $x+y$ là 7.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=6;\ y=1$.

Cách khác:

Theo AM-GM ta có $2\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{y+3}\right)=2\sqrt{x-2}+2\sqrt{y+3}=\sqrt{4(x-2)}+\sqrt{4(y+3)}\le\dfrac{x+2}{2}+\dfrac{y+7}{2}$

Do đó $x+y+1\le\dfrac{x+y+9}{2}\Leftrightarrow x+y\le 7$

2. Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có $(4+1)\left(x^2+y^2\right)\ge(2x+y)^2\ge(x+y+2)^2$.

$\Leftrightarrow 5\left(x^2+y^2\right)\ge(x+y+2)^2\Leftrightarrow -3\left(x^2+y^2\right)\le-\dfrac{3(x+y+2)^2}{5}$.

Mặt khác $x+y+1=2\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{y+3}\right)\ge 2\sqrt{x+y+1}\Leftrightarrow x+y\ge 3$ vì $\sqrt{a}+\sqrt{b}\ge\sqrt{a+b};\ \forall a,b\ge 0$.

Do đó $3^{x+y-4}+(x+y+1)3^{7-x-y}-3\left(x^2+y^2\right)\le 3^{x+y-4}+(x+y+1)2^{7-x-y}-\dfrac{3(x+y+2)^2}{5}$.

Đặt $t=x+y+2$ với $t\in[5;9]$, xét hàm số $f(t)=3^{t-6}+(t-1)2^{9-t}-\dfrac{3t^2}{5}$.

Lại có $f'(t)=3^{t-6}.\ln 3+2^{9-t}-(t-1)2^{9-t}.\ln 2-\dfrac{6t}{5}<0;\ \forall t\in[5;9]$.

Mà $f(5)=\dfrac{148}{3};\ f(9)=-\dfrac{68}{5}$ nên suy ra $\max f(t)=f(5)=\dfrac{148}{3}$.

Từ đó suy ra để bất phương trình $3^{x+y-4}+(x+y+1)3^{7-x-y}-3\left(x^2+y^2\right)\le m$ có nghiệm với mọi $x,y\in(*)$ khi và chỉ khi $m\ge\dfrac{148}{3}$.