CÁC DẠNG TOÁN LỚP 9 VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

ĐIỂM THUỘC ĐƯỜNG - ĐƯỜNG ĐI QUA ĐIỂM

Bài toán: Cho (C) là đồ thị hàm số y = f(x) và một điểm A(x_A ; y_A). Hỏi (C) có đi qua A không

Phương pháp giải:

Đồ thị (C) đi qua A(x_A ; y_A) khi và chỉ khi toạ độ của A nghiệm đúng phương trình của (C)

- A $\in$ (C) $\Leftrightarrow$ $y_A = f(x_A)$

Do đ ó : T ính $y_A = f(x_A)$

- N ếu $f(x_A) = y_A$ th ì (C) đi qua A
- N ếu $f(x_A) \neq y_A$ thì (C) kh ông đi qua A

LẬP PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

BÀI TOÁN 1:

Lập phương trình đường thẳng (D) đi qua điểm A($x_{A;}$ y_A) và có hệ số góc bằng k

Cách giải:

- Gọi phương trình tổng quát của đường thẳng (D) là:

$$y = ax + b \quad (*)$$

+ Xác định a:

Theo giả thiết ta có : a = k => y = kx + b

+ Xác định b :

(D) đi qua A(x_A ; y_A) $\Leftrightarrow$ $y_A = kx_A + b \Rightarrow b = y_A - kx_A$

Thay a = k và b = $y_A - kx_A$ vào (*) ta được phương trình của (D)

BÀI TOÁN 2:

Lập phương trình đường thẳng (D) đi qua 2 điểm A(x_A; y_A) và B(x_B ; y_B)

Cách giải:

- phương trình tổng quát của đường thẳng (D) là :

$$y = ax + b$$

(D) đi qua A và B nên ta có : $\begin{cases} y_A = ax_A + b \\ y_B = ax_B + b \end{cases}$

Giải hệ phương trình tìm được a, b . Suy ra phương trình của (D)

BÀI TOÁN 3 :

Lập phương trình của đường thẳng (D) có hệ số góc k và tiếp xúc với đường cong (P) :

y = f(x)

Các giải :

- Phương trình của (D) có dạng : y = ax + b
- Phương trình hoành độ giáo điểm của (D) và (P) là :

  f(x) = kx + b (1)
- (D) tiếp xúc với (P) ⇔ phương trình (1) có nghiệm kép ⇔ $\Delta = 0$

Từ điều kiện này tìm được b .Suy ra hương trình của (D)

BÀI TOÁN 4 :

Lập phương trình đường thẳng (D) đi qua A(x_A ; y_A) và tiếp xúc với đường cong (P) :

y = f(x) .

Cách giải :

- Phương trình đường thẳng của (D) là : y = ax + b

- Phương trình hoành độ giao điểm của (D) và (P) là :

f (x) = ax + b (1)

(D) tiếp xúc với (P) ⇔ phương trình (1) có nghiệm kép.Từ điều kiện này tìm ra được hệ thức giữa a và b (2)

Mặt khác : (D) đi qua A(x_A ; y_A) do đó ta có :

$y_A = ax_A + b$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra a và b suy ra phương trình của (D)

SỰ TƯƠNG GIAO CỦA HAI ĐỒ THỊ

Bài toán : Cho (C) và (L) theo thứ tự là đồ thị của các hàm số:

y = f(x)

y = g(x)

Khảo sát sự tương giao của hai đồ thị.

Cách giải:

Toạ độ giao điểm của (C) và (L) là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases} \quad \text{(I)}$$

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (L) là:

f(x) = g(x) (1)

- Nếu (1) vô nghiệm ⇔ (I) vô nghiệm ⇔ (C) và (L) không có điểm chung
- Nếu (1) có nghiệm kép ⇔ (I) có nghiệm kép ⇔ (C) và (L) tiếp xúc nhau
- Nếu (1) có 1 nghiệm hoặc 2 nghiệm ⇔ (I) có 1 hoặc 2 nghiệm ⇔ (C) và (L) có 1 hoặc hai điểm chung.

BÀI TẬP

Bài 1: Trong mặt phẳng toạ độ, cho điểm A (-2 ; 2) và đường thẳng (D) : y = - 2(x + 1)

a) Hỏi điểm A có thuộc (D) không

b) Tìm a trong hàm số $y = ax^2$ có đò thị (P) đi qua A

Giải:

a)Thay x = -2 vào vế phải của phương trình đường thẳng (D) ta có : y = -2(-2 + 1) = 2

Vậy điểm A(-2 ; 2) có thuộc đường thẳng (D)

b) Vì đồ thị (P) đi qua A nên ta có : $2 = a(-2)^2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

Bài 2 : Cho parabol (P): $y = x^2$ .Lập phương trình đường thẳng (D) song song với đường thẳng (D') : y = 2x và tiếp xúc với (P)

Giải:

Phương trình đường thẳng (D) cần tìm có dạng: y = ax + b

Đường thẳng (D) song song với đường thẳng (D') nên a = 2 => y = 2x + b

Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng (D) và parabol (P) là:

$x^2 = 2x + b \Leftrightarrow x^2 - 2x - b = 0$ (1)

(D) tiếp xúc với (P) $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow 1 + b = 0 \Rightarrow b = -1$

Vậy phương trình đường thẳng (D) là: y = 2x - 1

Bài 3: Trong mặt phẳng toạ độ cho 2 đường thẳng (d_1) : y = 2x – 7 và (d_2): y = - x- 1

a) Vẽ đường thẳng (d_1) và (d_2)

b) Tìm toạ độ giao điểm của (d_1) và (d_2) bằng đồ thị. Rồi kiểm tra lại bằng phép tính

Giải:

a) HS tự vẽ

b) Gọi giao điểm của (d_1) và (d_2) là M khi đó hoành độ của điểm m là nghiệm của phương trình: $2x - 7 = -x - 1 \Leftrightarrow x = 2$

Tung độ của điểm M là y = - 2 – 1 = - 3

Vậy toạ độ giao điểm của (d_1) và (d_2) l à : M(2 ;-3)

Bài 4: Trong mặt phẳng toạ độ cho hai điểm A(0; - 1) và B(1; 2)

a) Viết phương trình đường thẳng đi qua A và B

b) Điểm C(- 1;- 4) có nằm trên đường thẳng đó không

Giải:

a) Gọi phương trình đường thẳng cần tìm là (D) : y = ax + b

Đường thẳng (D) đi qua A và B nên ta có :

$$\begin{cases} -1 = a.0 + b \\ 2 = a.1 + b \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được : a = 3 ; b = -1

Vậy phương trình đường thẳng cần tìn là (D) : y = 3x – 1

b) Với x = -1 thì y = 3(-1) – 1 = - 4 .Do đó điểm C(- 1;- 4) nằm trên đường thẳng (D)

<u>Bài 5</u>: Với giá trị nào của m thì đường thẳng :

(d_1) : y = (m – 1)x ; (d_2) : y = 3x – 1

a) song song với nhau
b) Cắt nhau
c) Vuông góc với nhau

<u>Gi ải</u>:

a) (d_1) // (d_2) $\Leftrightarrow$ m – 1 = 3 $\Leftrightarrow$ m = 4
b) (d_1) cắt (d_2) $\Leftrightarrow$ m – 1 $\neq$ 3 $\Leftrightarrow$ m $\neq$ 4
c) (d_1) vuông góc (d_2) $\Leftrightarrow$ (m – 1).3 = -1 $\Leftrightarrow$ m = $\frac{2}{3}$

<u>Bài 6:</u> Tìm giá trị của a để 3 đường thẳng : (d_1): y = 2x – 5 ; (d_2) : y = x +2 (d_3) : y = ax – 12 . Đồng quy tại 1 điểm

<u>Giải</u>:

Ta thấy hai đường thẳng (d_1) v à (d_2) có hệ số góc khác nhau nên (d_1) và (d_2) chắc chắn cắt nhau. Gọi giao điểm của (d_1) và (d_2) l à M

Hoành độ của điểm M là nghiệm của phương trình : 2x – 5 = x +2 => x = 7

Tung độ của M là y = 7 + 2 = 9 .Do đó M(7 ; 9)

Đ ể 3 đ ường thẳng trên đồng quy tại 1 điểm thì dường thẳng (d_3) phải đi qua điểm M(7 ;9)

$\Leftrightarrow$ 9 = a.7 – 12 $\Leftrightarrow$ a = 3

<u>Bài 7</u>: Trong mặt phẳng toạ độ cho điểm A(- 2;2) và đường thẳng (d_1): y = - 2(x+1)

1) Giải thích tại sao A nằm trên (d_1)
2) Tìm a trong hàm số y = ax^2 có đồ thị(P) đi qua A
3) Viết phương trình đường thẳng (d_2) qua A và vuông góc với (d_1)
4) Gọi A và B là giao điểm của (P) và (d_2); C là giao điểm của (d_1) với trục tung .Tìm toạ độ giao điểm của B và C .Tính diện tích tam giác ABC

<u>Giải:</u>

Câu 1) 2) xem bài 1

3) Gọi phương trình đường thẳng (d_2) là : y = ax + b

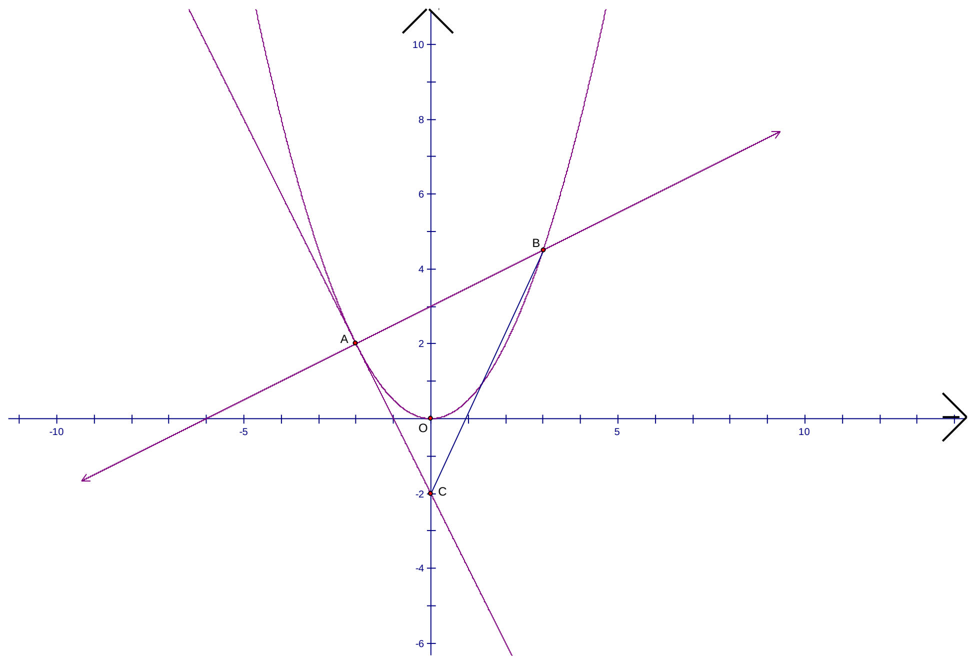
Vì đường thẳng (d_2) vuông góc với (d_1) => a.(-2) = -1 => a = $\frac{1}{2}$

Mặt khác đường thẳng (d_2) đi qua điểm A(- 2 ; 2) nên ta có x = -2 , y = 2

Thay a = $\frac{1}{2}$; x = -2 ; y = 2 vào y = ax + b ta có : 2 = $\frac{1}{2}$(-2) + b => b = 3

Vậy phương trình đường thẳng (d_2) là : y = $\frac{1}{2}$x + 3

4)



Hoành độ của điểm B là nghiệm của phương trình : $\frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}x + 3$ .giải phương trình này ta được $x_1 = 2$ (chính là hoành độ của điểm A) $x_2 = 3$ là hoành độ điểm B.Khi đó tung độ điểm B là y = $\frac{1}{2}.3^2 = \frac{9}{2}$.Vậy toạ độ của điểm B(3 ; $\frac{9}{2}$)

Toạ độ C(0 ; - 2)

Ta có AB = $\sqrt{(-2-3)^2+(2-\frac{9}{2})^2} = \sqrt{25+\frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{125}{4}} = \frac{5}{2}\sqrt{5}$

AC = $\sqrt{(-2-0)^2+(2+2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{1}{2}.\frac{5}{2}\sqrt{5}.2\sqrt{5} = \frac{25}{2}$ (đvdt)

<u>Bài 8</u> : Trong cùng hệ trục toạ độ , gọi (P) là đồ thị hàm số y = x^2 và (D) là đồ thị hàm số

y = - x + 2

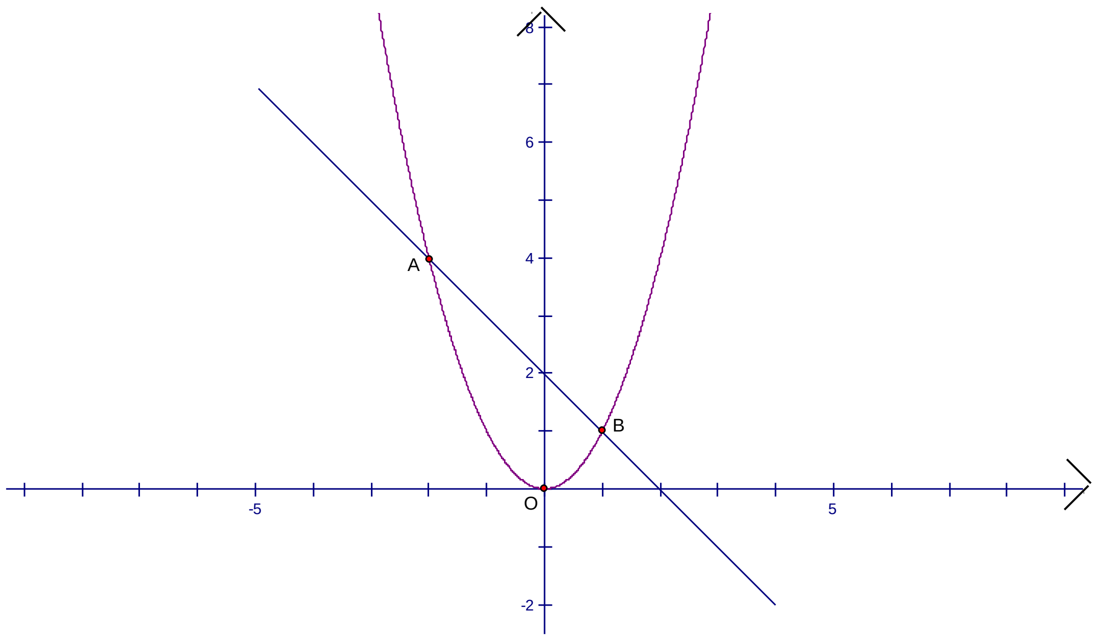
a) Vẽ (P) và (D)

b) Xác định toạ độ giao điểm của (P) và (D) bằng đồ thị và kiểm tra lại bằng phép tính.

c) Tìm a và b trong hàm số y = ax + b, biết rằng đồ thị (d/) của hàm số này song song với (D) và cắt (P) tại điểm có hoành độ bằng – 1

Giải:

a) Vẽ (P) và (D):



b)Dựa vào đồ thị ta có A(2;4) , B(1 ;2) .Kiểm tra bằng cách thay toạ độ của các điểm A và B vào 2 hàm số ta thấy đều thoả mãn.

c) Đường thẳng (d/) song song với đường thẳng (D) nên a = -1. Mặt khác (d/) cắt (P) tại điểm có hoành độ bằng -1 ,tức là (d/) đi qua điểm (-1; 1) => x = -1 , y = 1

Thay a = -1 . x = -1 , y = 1 vào phương trình của đường thẳng (d/) ta có :

1 = (-1)(-1) + b => b = 0

Vậy phương trình của đường thẳng (d/) là : y = - x

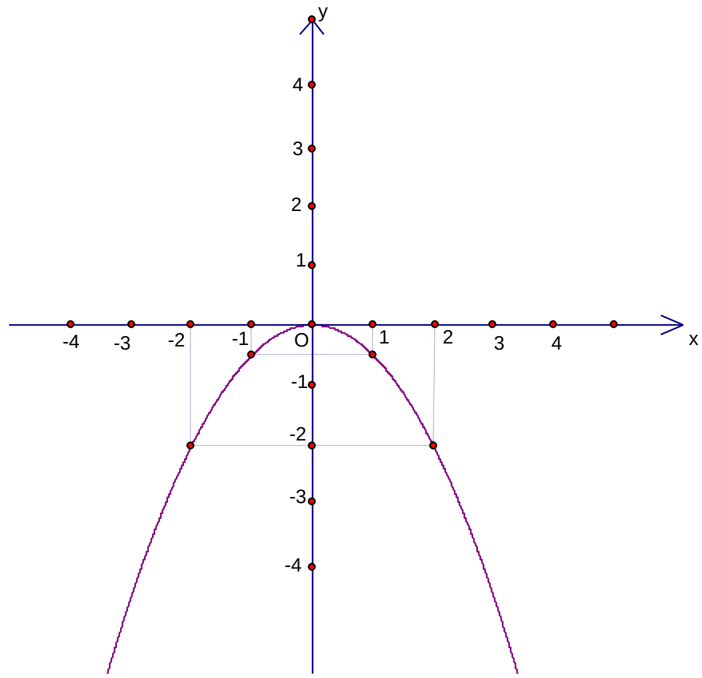
Bài 9: Cho hàm số : $y = -\frac{1}{2}x^2$ (P)

a) Vẽ đồ thị (P)
b) Tìm giá trị của m để đường thẳng y = 2x + m cắt đồ thị (P) tại 2 điểm phân biệt .

Giải :

a)Lập bảng giá trị :

x	-2	-1	0	1	2
$y = -\frac{1}{2}x^2$	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-2



c) Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng (D) : y = 2x + m và parabol(P)

l à : $-\frac{1}{2}x^2 = 2x + m \Leftrightarrow x^2 + 4x + 2m = 0$ (1)

Để (D) và (P) cắt nhau tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 4 - 2m > 0 \Leftrightarrow m < 2$

Vậy với m < 2 thì đường thẳng (D) và parabol (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt

Bài 10 : Trên cùng hệ trục toạ độ cho đường thẳng (D) và parabol (P) có phương trình :

(D) : y = k(x -1)

(P) : $y = x^2 - 3x + 2$

a) Chứng tỏ rằng với mọi giá trị của k , (D) và (P) luôn có điểm chung

b) Trong trường hợp (D) tiếp xúc với (P) .Tìm toạ độ tiếp điểm.

Giải:

a)Phương trình hoành độ giao điểm của (D) và (P) là:

$$x^2 - 3x + 2 = k(x - 1) \Leftrightarrow x^2 - (3 + k)x + 2 + k = 0 \quad (1)$$

Phương trình (1) có : $\Delta = (3 + k)^2 - 4(2 + k) = 9 + 6k + k^2 - 8 - 4k = k^2 + 2k + 1$

$= (k + 1)^2 \geq 0$ với mọi k

Vậy phương trình (1) luôn có nghiệm với mọi k .Do đó đường thẳng (D) và parabol (P) luôn có điểm chung

b) (D) tiếp xúc với (P) $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow (k + 1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow k = -1$,Khi đó phương trình (1) có nghiệm là $x = \frac{3+k}{2} = \frac{3-1}{2} = 1$ (Đây chính là hoành độ giao điểm của (D) và (P)).Tung độ giao điểm là: y = 0

Vậy toạ độ tiếp điểm là : (1 ;0)

<u>Bài 11</u>: Cho hàm số $y = ax^2$ có đồ thị (P) đi qua điểm A(-2;4) và tiếp xúc với đường thẳng (D) của hàm số : $y = (m-1)x - (m - 1)$

a) Tìm a , m và toạ độ tiếp điểm.
b) Vẽ đồ thị (P) và (D) với a , m tìm được trên cùng hệ trục toạ độ.

Giải:

a) Đồ thị (P) đi qua điểm A(-2; 4) nên ta có : $4 = a.(-2)^2 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow$ (P) : $y = x^2$

Đề (P) tiếp xúc với (D) thì phương trình : $(m - 1)x - (m - 1) = x^2$ có nghiệm kép

$\Leftrightarrow x^2 - (m - 1)x + (m - 1) = 0$ có nghiệm kép

$\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow (m - 1)^2 - 4(m - 1) = 0 \Leftrightarrow (m - 1)(m - 1 - 4) = 0 \Leftrightarrow (m - 1)(m - 5) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m-1=0 \\ m-5=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=5 \end{array}\right.$$

*)Với m = 1 => $x = \frac{m-1}{2} = \frac{1-1}{2} = 0$ (đây là hoành độ tiếp điểm) , tung độ tiếp điểm là:

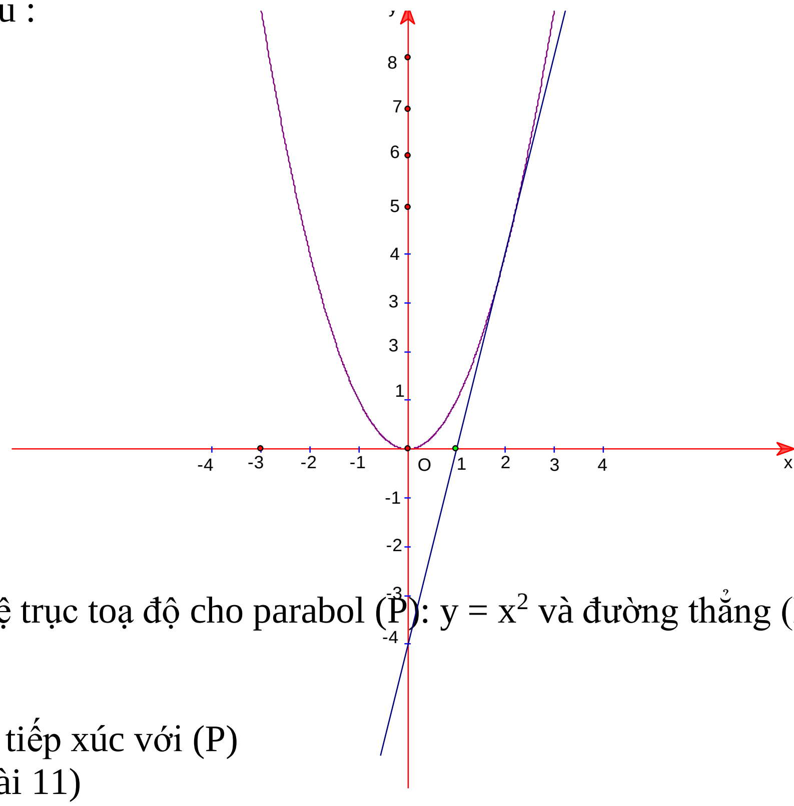
y = 0.Vậy toạ độ tiếp điểm thứ là : (0 ; 0) Chính là gốc toạ độ. Khi đó đường thẳng (D) trùng với trục hoành Ox

*) Với m = 5 => $x = \frac{m-1}{2} = \frac{5-1}{2} = 2$ (là hoành độ tiếp điểm) ,tung độ tiếp điểm là:

y = 4 . Vậy toạ độ tiếp điểm thứ 2 là : (2 ; 4)

b) Ta vẽ đồ thị hàm số : $y = x^2$.

Khi m = 1 đường thẳng (D) trùng với trục hoành
Khi m = 5 đường thẳng (D) có phương trình là : y = 4x – 4
Có đồ thị như sau :



<u>Bài 12</u>: Trên cùng hệ trục toạ độ cho parabol (P): y = x^2 và đường thẳng (D) : y = 2x + m

a) Vẽ P.
b) Tìm m để (D) tiếp xúc với (P)

(Hướng dẫn : xem bài 11)

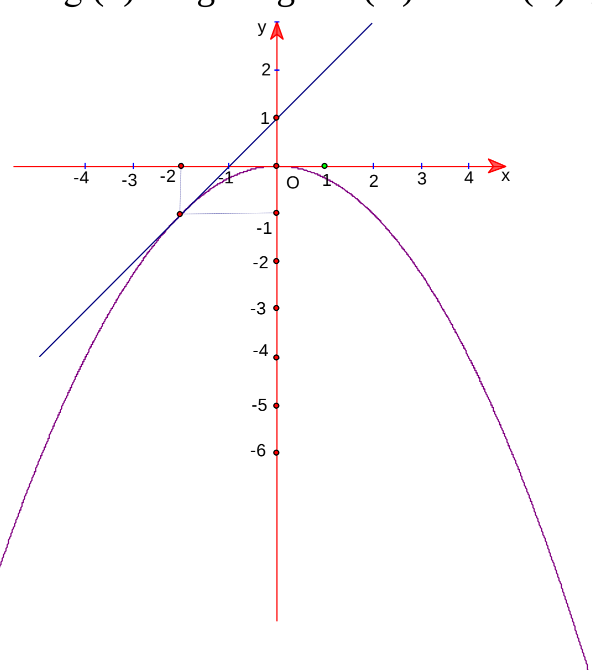
<u>Bài 13:</u> Trong cùng hệ trục toạ độ gọi (P) và (D) lần lượt là đồ thị hàm số :

$$y = -\frac{x^2}{4} \quad \text{và } y = x + 1$$

a) Vẽ (P) và (D)
b) Dùng đồ thị hàm số để giải phương trình : $x^2 + 4x + 4 = 0$
c) Viết phương trình đường thẳng (d) song song với (D) và cắt (P) tại điểm có tung độ là – 4

<u>Giải:</u>

a) Vẽ (P) và (D):



c) Phương trình : $x^2 + 4x + 4 = 0$ (1) $\Leftrightarrow - x^2 = 4x + 4 \Leftrightarrow -\frac{x^2}{4} = x + 1$

Đặt $y = -\frac{x^2}{4}$ => $y = x + 1$ là hai đồ thị hàm số đã vẽ ở câu a) Do đó nghiệm của phương trình (1) là hoành độ giáo điểm của 2 đồ thi trên. Dựa vào đồ thị ta có: Hai đồ thị tiếp xúc nhau tại điểm có hoành độ là – 2 .Nên nghiệm của phương trình đã cho là x = -2

d) Gọi phương trình đường thẳng (d) cần tìm là : y = ax + b

Vì (d) // (D) => a = 1

Vì (d) cắt (P) tại điểm có tung độ bằng – 4 => hoành độ của đó là : x = 4 .Tức là đường thẳng (d) đi qua điểm (4; - 4) nên ta có :

- 4 = 1. 4 + b => b = - 8.Vậy phương trình đường thẳng (d) cần tìm là: y = x – 8.

<u>Bài 14</u>: Cho hàm số : $y = x^2$ và y = x + m

a) Tìm m sao cho đồ thị (P) của $y = x^2$ và độ thị (D) của y = x + m có 2 giao điểm phân biệt A và B
b) Tìm phương trình đường thẳng (d) vuông góc với (D) tiếp xúc với (P)
c) Thiết lập công thức tính khoảng cách giữa hai giao điểm theo toạ độ của 2 điểm ấy. Áp dụng : Tìm m sao cho khoảng cách giữa 2 điểm A và B ở câu a) là $3\sqrt{2}$

<u>Giải :</u>

a) Phương trình hoành độ giao điểm của (D) và (P) là :

$x^2 = x + m \Leftrightarrow x^2 – x – m = 0$ (1)

(D) và (P) cắt nhau tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow (-1)^2 – 4.1.(-m) > 0 \Leftrightarrow 1 + 4m > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{4}$

b) Gọi phương trình đường thẳng (d) cần tìm : y = ax + b

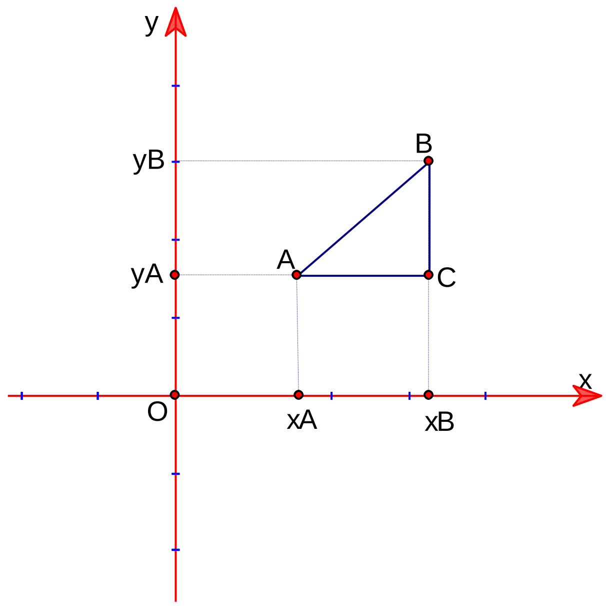
Vì (d) $\perp$ (D) => a.1 = -1 => a = -1 => y = -x + b

Phương trình hoành độ giáo điểm của (d) và (P) là : $x^2 = - x + b \Leftrightarrow x^2 + x - b = 0$ (2)

Phương trình (2) có : Δ = 1 + 4b
(d) tiếp xúc (P) $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có nghiệm kép $\Leftrightarrow$ Δ = 1 + 4b = 0
=> b = - $\frac{1}{4}$

Vậy phương trình đường thẳng (d) cần tìm là : y = - x - $\frac{1}{4}$

c) Giả sử A(x_A; y_A) và B(x_B; y_B) (Hình vẽ)



Khoảng cách giữa hai điểm x_A , x_B trên trục Ox bằng $|x_B - x_A|$ .Khoảng cách giữa hai điểm
y_A , y_B trên trục Oy bằng $|y_B - y_A|$

Trong tam giác vuông ABC ta có : $AB^2 = AC^2 + BC^2$

$$= (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Theo câu a) ta có : Với m > - $\frac{1}{4}$ phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt là:

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{1+4m}}{2} \quad ; \; x_2 = \frac{1-\sqrt{1+4m}}{2}$$

Với $x_1 = \frac{1+\sqrt{1+4m}}{2}$ => $y_1 = \frac{1+\sqrt{1+4m}+2m}{2}$

$x_2 = \frac{1-\sqrt{1+4m}}{2}$ => $y_2 = \frac{1-\sqrt{1+4m}+2m}{2}$

Gọi A($\frac{1+\sqrt{1+4m}}{2}$; $\frac{1+\sqrt{1+4m}+2m}{2}$) và B($\frac{1-\sqrt{1+4m}}{2}$; $\frac{1-\sqrt{1+4m}+2m}{2}$)

Áp dụng công thức trên ta có :

$$AB = \sqrt{\left(\frac{1+\sqrt{1+4m}}{2}-\frac{1-\sqrt{1+4m}}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\sqrt{1+4m}+2m}{2}-\frac{1-\sqrt{1+4m}+2m}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{1+4m}}{2}\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{1+4m}}{2}\right)^2} = \sqrt{1+4m+1+4m} = \sqrt{2+8m}$$

$AB = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2+8m} = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow 2+8m = 18 \Leftrightarrow m = 2$

Trả lời : m = 2 là giá trị cần tìm

<u>Bài 15</u> : Trong cùng hệ trục toạ độ , gọi (P) là đồ thị hàm số : $y = \frac{1}{4}x^2$,

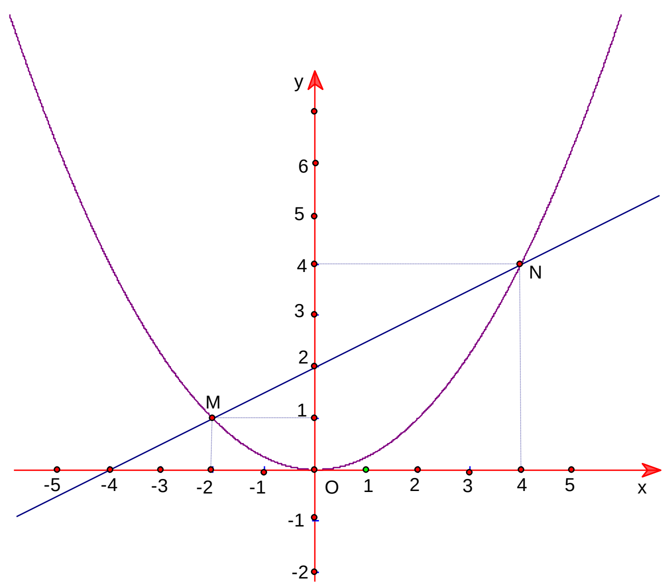
(D) là đồ thị hàm số :$y = \frac{1}{2}x + 2$

a) Vẽ (D) và (P)

b) Tìm toạ độ giao điểm của (P) và (D) bằng đồ thị và bằng phép toán

<u>Giải:</u>

a)Vẽ (D) và (P)



b) Dựa vào đồ thị ta có đường thẳng (D) cắt parabol (P) tại hai điểm M(-2 ; 1) và N(4 ; 4)

Kiểm tra bằng phép tính :

Phương trình hoành độ giao điểm của (D) và (P) là :

$$\frac{1}{4}x^2 = \frac{1}{2}x + 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \ (1)$$

Có : $\Delta' = 1 + 8 = 9 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = 3 \Rightarrow$ phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt :

$x_1 = 1 - 3 = -2$; $x_2 = 1 + 3 = 4$

Do đó đường thẳng (D) cắt parabol (P) tại 2 điểm phân biệt ,có hoành độ giao điểm lần lượt là -2 , 4

Với $x_1 = -2$ => $y_1 = \frac{1}{4}(-2)^2 = 1$ => M(-2 ; 1)

Với $x_2 = 4$ => $y_2 = \frac{1}{4}.4^2 = 4$ => N(4 ; 4)

<u>Bài 16</u>: Cho parabol (P) : $y = -\frac{x^2}{4}$ và điểm M (1 ; -2)

a) Viết phương trình đường thẳng (D) qua M và có hệ số góc là m
b) Chứng minh rằng (D) luôn luôn cắt (P) tại 2 điểm phân biệt khi m thay đổi

<u>Giải :</u>

a) Phương trình đường thẳng (D) cần tìm có dạng: y = mx + b
Vì (D) đi qua M(1 ; -2) => -2 = m.1 + b => b = - m – 2
Vậy phương trình đường thẳng (D) cần tìm là : y = mx – m – 2
b)Ta có phương trình hoành độ giáo điểm của (D) và (P) là :

$$-\frac{x^2}{4} = mx - m - 2 \Leftrightarrow x^2 + 4mx - 4m - 8 = 0 \quad (1)$$

Phương trình (1) có: $\Delta' = 4m^2 + 4m + 8 = 4m^2 + 4m + 1 + 7$
$= (2m + 1)^2 + 7 > 0$ với mọi m
Nên phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt với mọi m
Do đó đường thẳng (D) luôn cắt (P) tại 2 điểm phân biệt khi m thay đổi.

<u>Bài 17</u> : Trong cùng hệ trục toạ độ vuông góc cho parabol (P) : $y = -\frac{1}{4}x^2$ và đường thẳng (D) : y = mx – 2m – 1

1) Vẽ (P)
2) Tìm m sao cho (D) tiếp xúc với (P)
3) Chứng tỏ (D) luôn luôn qua điểm cố định A thuộc (P)

<u>Giải :</u>

1) Tự vẽ
2) Phương trình hoành độ giao điểm của (D) và (P) là : $-\frac{1}{4}x^2 = mx - 2m - 1$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4mx - 8m - 4 = 0 \quad (1)$$

(D) tiếp xúc với (P) $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta' = 0$

$$\Leftrightarrow 4m^2 + 8m + 4 = 0 \Leftrightarrow (2m + 2)^2 = 0 \Leftrightarrow 2m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = -1$$

Vậy m = -1 thì (D) tiếp xúc với (P)

3) Gọi A(x_0 ; y_0) là điểm cố định mà đường thẳng (D) luôn đi qua
Khi đó phương trình : $y_0 = mx_0 - 2m - 1$ có nghiệm với mọi m

$$\Leftrightarrow (x_0 - 2)m - (y_0 + 1) = 0 \text{ có nghiệm với mọi m}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - 2 = 0 \\ y_0 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = -1 \end{cases}$$

Suy ra điểm A(2 ; -1).Thay x = 2 vào phương trình của (P) ta có y = - $\frac{1}{4}$. 2^2 = - 1

Nên điểm A(2 ; -1) thuộc (P).Vậy đường thẳng (D) luôn đi qua điểm A(2 ; -1) cố định thuộc (P)

<u>Bài 18</u> : Trên cùng hệ trục toạ độ cho parabol (P) : y = $\frac{1}{4}x^2$ và đường thẳng (D) : y = x – 1

a) Vẽ (P) và (D)
b) Chứng tỏ (bằng phép toán) (P) và (D) tiếp xúc nhau tại 1 điểm ,xác định toạ độ điểm này.

<u>Bài 20</u> : Trong cùng hệ trục toạ độ cho parabol (P) : y = $\frac{x^2}{4}$ và đường thẳng (D) đi qua điểm

I($\frac{3}{2}$; -1) có hệ số góc m

1) Vẽ (P) và viết phương trình của (D)
2) Tìm M sao cho (D) tiếp xúc với (P)
3) Tìm m sao cho (D) và (P) có 2 điểm chung phân biệt

<u>Bài 21</u> : Cho parabol (P) : y = $\frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng y = $\frac{1}{2}$ x + 3

a) Xác định toạ độ giao điểm A, B của parabol và đường thẳng
b) Xác định toạ độ điểm C thuộc cung AB của parabol sao cho tam giác ABC có diện tích lớn nhất

<u>Bài 22</u> : Cho hàm số : y = $\frac{1}{2}x^2$ (P)

a) Vẽ đồ thị hàm số trên
b) Tìm giá trị của m để đường thẳng (d) : y = (m- 4)x + m + 1 cắt đồ thị hàm số trên tại điểm A có hoành độ bằng 2 .Rồi tìm toạ độ thứ 2 khác A
c) Chứng minh rằng với mọi giá trị của m thì đường thẳng (d) và parsbol (P) cắt nhau tại 2 điểm phân biệt.
d) Gọi y_1 ; y_2 là tung độ giao điểm của 2 đồ thị (d) và (P) . Tìm m để $y_1 + y_2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải

a)

b) Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là: $\frac{1}{2}x^2 = (m-4)x + m + 1$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2(m-4)x - 2m - 2 = 0 \quad (*)$$

Vì đường thẳng (d) cắt (P) tại điểm A có hoành độ bằng 2 nên là nghiệm của phương trình (*) => $4 - 2(m-4).2 - 2m - 2 = 0 \Leftrightarrow 4 - 4m + 16 - 2m - 2 = 0 \Leftrightarrow -6m + 18 = 0$

$\Leftrightarrow m = 3$

Vậy với m= 3 thì đường thẳng (d) cắt (P) tại điểm A có hoành độ bằng 2

Hoành độ giao điểm thứ 2 khác A là nghiệm thứ 2 của phương trình (*)

Theo Vi-et : $x_1.x_2 = \frac{c}{a} = -2m - 2 = -2.3 - 2 = -8$. Mà $x_1 = 2$ => $2.x_2 = -8$ => $x_2 = -4$

Tung độ của điểm thứ hai là : $y = \frac{1}{2}.(-4)^2 = 8$

Vậy toạ độ giao điểm thứ hai khác A là (- 4 ; 8)

c) Phương trình (*) có : $\Delta' = (m-4)^2 + 2m + 2 = m^2 - 6m + 18$

$= (m-3)^2 + 9 > 0$ với mọi m

Suy ra điều phải chứng minh

d) Gọi x_1 , x_2 lần lượt là hoành độ giao điểm của 2 đồ thị (d) và (P) tương ứng với tung độ y_1 ; y_2

⇨ $y_1 = (m-4)x_1 + m + 1$

$y_2 = (m-4)x_2 + m + 1$

=> $y_1 + y_2 = (m-4)(x_1 + x_2) + 2m + 2 = (m-4).2(m-4) + 2m + 2 = 2m^2 - 14m + 34$

$$= 2(m^2 - 7m + 17) = 2\left(m^2 - 2.\frac{7}{2}m + \frac{49}{4} + \frac{19}{4}\right) = 2\left(m - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{19}{2} \geq \frac{19}{2}$$

Suy ra : Min $(y_1 + y_2) = \frac{19}{2}$ khi $m = \frac{7}{2}$

<u>Bài 23</u> :Cho đường thẳng (d) : $y = 4x + m$ và parabol (P) : $y = 2x^2$

Tìm m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại 2 điểm A , B và cắt trục tung Oy tại M . Sao cho MA = 3MB

Giải :

Xét phương trình : $2x^2 = 4x + m \Leftrightarrow 2x^2 - 4x - m = 0$ (1)

(d) cắt (P) tại 2 điểm A và B $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có 2 nghiệm

$\Leftrightarrow \Delta' = 4 + 2m \geq 0$

$\Leftrightarrow m \geq -2$

Hai giao điểm là : $A(x_1 ; y_1)$, $B(x_2 ; y_2)$ (ở đó x_1 , x_2 là nghiệm của phương trình (1))

Theo Vi-et ta có : $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \text{..........(2)} \\ x_1.x_2 = \dfrac{-m}{2} \text{.........(3)} \end{cases}$

Theo giả thiết (d) trục Oy tại M sao cho MA = 3MB $\Leftrightarrow |x_2| = 3.|x_1| \Leftrightarrow$

$\left[\begin{array}{l} x_2 = 3x_1 \\ x_2 = -3x_1 \end{array}\right.$

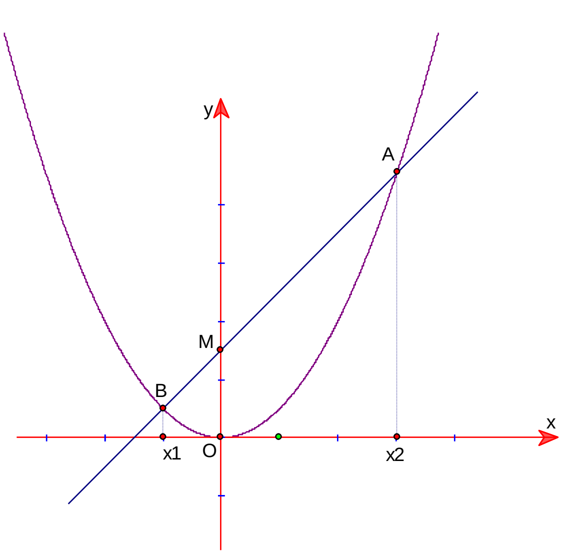
Với $x_2 = 3x_1 \Rightarrow x_1 + 3x_1 = 2 \Rightarrow x_1 = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x_2 = \dfrac{3}{2}$

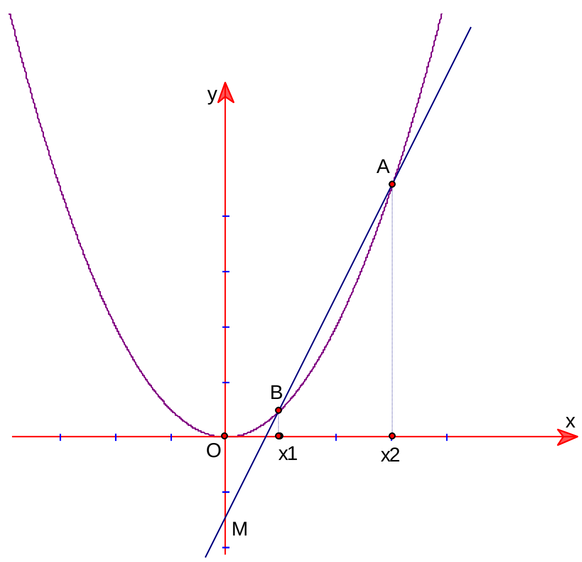
$\Rightarrow x_1x_2 = \dfrac{-m}{2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}.\dfrac{3}{2} = \dfrac{-m}{2} \Rightarrow m = -\dfrac{3}{2}$ (Không thoả mãn điều kiện $m \geq -2$)

Với $x_2 = -3x_1 \Rightarrow x_1 - 3x_1 = 2 \Rightarrow x_1 = -1 \Rightarrow x_2 = 3$

$\Rightarrow \dfrac{-m}{2} = x_1.x_2 = (-1) . 3 = -3 \Rightarrow m = 6$ (Thoả mãn điều kiện $m \geq -2$)

Vậy m = 6 là giá trị cần tìm





A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Bài toán 1.1 *Cho biểu thức* $P = \dfrac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} + \dfrac{\sqrt{x} - x}{\sqrt{x} - 1}$ *a) R* *út gọn biểu thức P* *với* $x \geq 0, x \neq 1.$

b) Tìm x khi $P = 0.$

(Trích đề thi tuyển sinh vào lớp 10 tỉnh Nam Định năm 2011)

➢ **Lời giải.** a) Với $x \geq 0, x \neq 1$ ta có

$$P = \frac{\sqrt{x}\left(x\sqrt{x}-1\right)}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}\left(1-\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{x}\left[\left(\sqrt{x}\right)^3-1\right]}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}-1}$$

$$= \frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}{x+\sqrt{x}+1} - \sqrt{x} = \sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right) - \sqrt{x}$$

$$= x - \sqrt{x} - \sqrt{x} = x - 2\sqrt{x}.$$

Vậy với $x \geq 0, x \neq 1$ thì $P = x - 2\sqrt{x}.$

b) Với $x \geq 0, x \neq 1$ ta có

$$P = 0 \Leftrightarrow x - 2\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}\left(\sqrt{x} - 2\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x} = 0\\ \sqrt{x} - 2 = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 0\\ \sqrt{x} = 2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 0\\ x = 4\end{array}\right.$$

Đối chiếu với điều kiện $x \geq 0, x \neq 1$ ta thấy hai giá trị này đều thỏa mãn.

Vậy với $P = 0$ thì $x = 0, x = 4.$

NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý KHI GIẢI TOÁN

Kĩ năng cũng như cách giải chung cho dạng toán như câu a

- Đặt điều kiện thích hợp, *nếu đề bài đã nêu điều kiện xác định thì ta vẫn phải chỉ ra trong bài làm của mình như lời giải nêu trên.*
- Đa phần các bài toán dạng này, chúng ta thường quy đồng mẫu, xong rồi tính toán rút gọn tử thức và sau đó xem tử thức và mẫu thức có thừa số chung nào hay không để rút gọn tiếp.
- Trong bài toán trên thì đã không quy đồng mẫu mà đơn giản biểu thức luôn.
- Khi làm ra kết quả cuối cùng, ta kết luận giống như trên.

Đối với dạng toán như câu b

- Cách làm trên là điển hình, không bị trừ điểm.
- Ngoài câu hỏi tìm *x* như trên thì người ta có thể hỏi: cho *x* là một hằng số nào đó bắt rút gọn *P*, giải bất phương trình, tìm giá trị lớn nhất nhỏ nhất, tìm *x* để *P* có

giá trị nguyên, chứng minh một bất đẳng thức. Nhưng thường thì người ta sẽ hỏi như sau: tìm *x* để *P* có giá trị nào đó (như ví dụ nêu trên), cho x nhận một giá trị cụ thể để tính *P*.

MỘT SỐ CÂU HỎI MỞ CHO BÀI TOÁN

- **Câu hỏi mở 1.** Rút gọn *P* khi $x = 3 + 2\sqrt{2}$.

Ta có $x = 3 + 2\sqrt{2} = 1^2 + 2.1.\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = (1 + \sqrt{2})^2$

Khi đó, với $x \geq 0, x \neq 1$ thì $\sqrt{x} = \sqrt{(1+\sqrt{2})^2} = 1 + \sqrt{2}$

Do đó $P = x - 2\sqrt{x} = 3 + 2\sqrt{2} - 2(1+\sqrt{2}) = 3 + 2\sqrt{2} - 2 - 2\sqrt{2} = 1.$

Vậy với $x = 3 + 2\sqrt{2}$ thì $P = 1$.

- **Câu hỏi mở 2.** Tìm giá trị nhỏ nhất của *P*

Với $x \geq 0, x \neq 1$ ta có $P = x - 2\sqrt{x} = (\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{x} + 1 - 1 = (\sqrt{x} - 1)^2 - 1$

Vì $x \neq 1$ nên $(\sqrt{x} - 1)^2 > 0 \Rightarrow (\sqrt{x} - 1)^2 - 1 > -1$

Vậy với $x \geq 0, x \neq 1$ thì P không có giá trị nhỏ nhất.

Trong loại câu hỏi này, ta cần chú ý đến điều kiện xác định. Chẳng hạn với điều kiện $x \geq 4$ ta rút gọn được $P = x - \sqrt{x}$ thì ta sẽ không làm như trên mà sẽ làm như sau

Với $x \geq 4$ ta có $P = x - 2\sqrt{x} + \sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{x} - 2) + \sqrt{x}$

Vì $x \geq 4 \Rightarrow \sqrt{x} \geq 2 \Rightarrow \sqrt{x} > 0, \sqrt{x} - 2 \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x} - 2) + \sqrt{x} \geq 0 + 2 = 2$

Vậy min $P = 2$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = 4$ (thỏa mãn điều kiện).

- **Câu hỏi mở 3.** Chứng minh rằng $P > -1$ thì ta làm như trên nhưng kết luận là $P > -1$.

- **Câu hỏi mở 4.** Tìm số nguyên *x* để *P* có giá trị nguyên.

Ví dụ trên, ta có $P = x - 2\sqrt{x}$, thì thường đề bài sẽ không hỏi đến nghiệm nguyên. Chẳng hạn với điều kiện $x \geq 1$ ta rút gọn được $P = \dfrac{3x}{x+1}$, đề bài hỏi: tìm số nguyên x để P nhận giá trị nguyên thì ta làm như sau

Với $x \geq 1$, ta có $P = \dfrac{3x}{x+1} = \dfrac{3(x+1) - 3}{x+1} = 3 - \dfrac{3}{x+1}$

Từ đó với x là số nguyên, $P \in ¢ \Leftrightarrow 3 - \dfrac{3}{x+1} \Leftrightarrow \dfrac{3}{x+1} \in ¢ \Leftrightarrow 3 \text{M}(x+1)$

Tương đương với $x + 1$ là ước của 3, mà ước của 3 là $\{-3;-1;1;3\} \Rightarrow (x+1) \in \{-3;-1;1;3\}$

Mà $x \geq 1 \Rightarrow x + 1 \geq 2 \Rightarrow x + 1 = 3 \Rightarrow x = 2$ (thỏa mãn điều điện)

Kết luận: vậy $x = 2$ là giá trị cần tìm.

Ta xét thêm một bài toán nữa là một câu trong đề chung chuyên Lê Hồng Phong Nam Định năm 2011.

Bài toán 1.2 *Cho biểu thức* $P=\left(\dfrac{3\sqrt{x}-1}{x-1}-\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}\right):\dfrac{1}{x+\sqrt{x}}$ *với* $x>0, x\neq 1.$

a) *Rút gọn biểu thức B*

b) *Tìm x để* $2P-x=3.$

(Đề chung Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định năm 2011)

➢ **Lời giải.** a) Với $x>0, x\neq 1$ ta có

$$B=\left(x+\sqrt{x}\right)\left(\frac{3\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}-\frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}\right)$$

$$=\sqrt{x}(\sqrt{x}+1).\frac{3\sqrt{x}-1-\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$=\frac{\sqrt{x}\,(2\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}-1}=\frac{2\sqrt{x}\,(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-1}=2\sqrt{x}.$$

Vậy với $x>0, x\neq 1$ thì $P=2\sqrt{x}.$

b) Với $x>0, x\neq 1$ và $P=2\sqrt{x}$ ta có

$$2P-x=3\Leftrightarrow 4\sqrt{x}-x=3$$

$$\Leftrightarrow x-4\sqrt{x}+3=0$$

$$\Leftrightarrow x-\sqrt{x}-3\sqrt{x}+3=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x}-1)-3(\sqrt{x}-1)=0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-3)=0$$