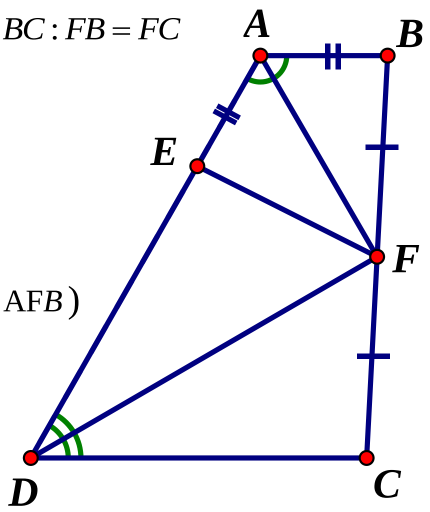
BÀI TẬP NÂNG CAO HÌNH HỌC LỚP 8

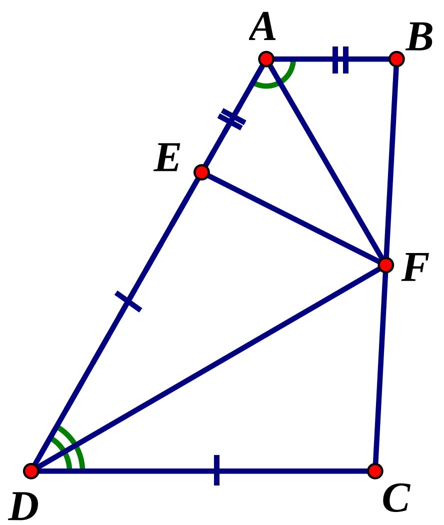
<u>BÀI 1</u>: Cho hình thang ABCD (AB//CD).
a/ Chứng minh rằng nếu hai tia phân giác của hai góc A và D cùng đi qua trung điểm F của cạnh bên BC thì cạnh bên AD bằng tổng hai đáy.
b/ Chứng minh rằng nếu AD = AB + CD thì hai tia phân giác của hai góc A và D cắt nhau tại trung điểm của cạnh bên BC.

<u>Giải</u>: a) ABCD : AB//CD; $BAF = DAF$; $ADF = CDF$; $F \in BC : FB = FC$



Chứng minh: AB + DC = AD.
Gọi $E \in AD : AE = AB$. (1)
Ta có : $\Delta ABF = \Delta AEF$ (c - g - c)
Suy ra: $AFE = AFB$;
Mặt khác : $AFD = 90^0$ (vì $FAD + FDA = 90^0$)
Nên $DFE = DFC$ (cùng phụ với 2 góc bằng nhau $AFE = AFB$)
+ DF : cạnh chung
Vậy $\Delta DEF = \Delta DCF$ (g - c- g)
$\Rightarrow$) DE = DC (2)
Từ (1) và (2), suy ra: AB + DC = AD (đpcm)

b) ABCD : AB//CD; $BAF = DAF$; $ADF = CDF$;
AB + DC = AD.

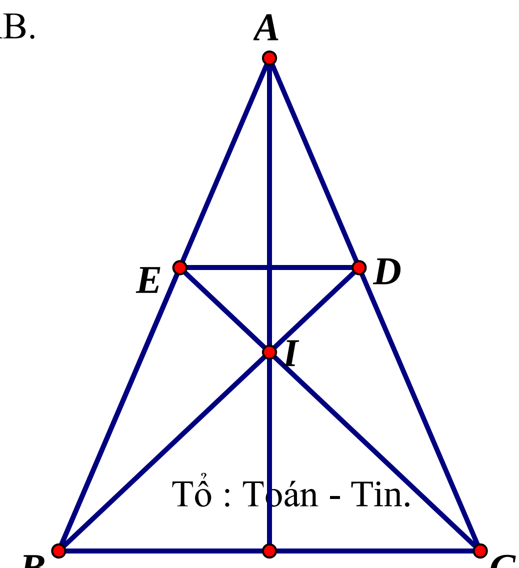


Chứng minh: $F \in BC : FB = FC$
Gọi $E \in AD : AE = AB$. Suy ra : DE = DC.
Nên $\Delta ABF = \Delta AEF$ (c - g - c)
$\Rightarrow$) $AFB = AFE$; BF = EF (*)
Tương tự: $\Delta DFE = \Delta DFC$ (c - g - c)
$\Rightarrow$) $EDF = CDF$; EF = FC (**)
Mặt khác : $AFD = AFE + EFD = 90^0$ (***)
Từ (*); (**) và (***), suy ra :
$BFC = AFB + AFE + EFD + CFD = 180^0$
Hay ba điểm B; F và C thẳng hàng và FB = FC
Nên F là trung điểm của BC.

<u>Bài 2</u>: Cho ΔABC cân ở A. Gọi I là một điểm bất kỳ thuộc đường cao AH. Gọi D là giao điểm của BI và AC. E là giao điểm của CI và AB.

a. CMR: AD = AE b. BEDC là hình gì ?

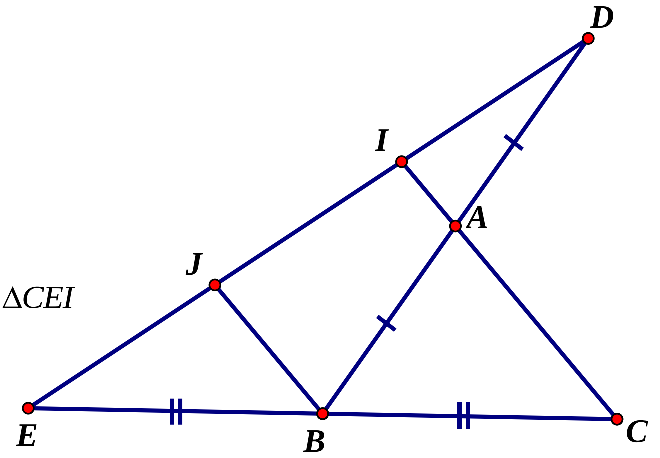
c. Xác định vị trí của I để BE = ED = DC



<u>Giải:</u>
a) Xét $\Delta ABC : AB = AC$; $AH \perp BC$
nên AH là trung trực của BC; $I \in AH$
Suy ra : BI = CI; $IBC = ICB$
Mặt khác : $B = C$

Nên $IBE = ICD$
Xét ΔEIB và ΔDIC
Có $IBE = ICD$; BI = CI; $BIE = CID$
Nên ΔEIB = ΔDIC (g - c - g)
$\Rightarrow$) BE = DC mà AB = AC
nên AD = AC - DC = AB - BE = AE.
b) Từ AD = AE. Ta có : ΔADE cân.
Nên $AED = ABC = \dfrac{180^0 - A}{2}$ (Cặp góc đồng vị)
Suy ra: DE // BC (Dhnb) và $ABC = ACB$
Vậy BCDE là hình thang cân (dhnb)
c) Để BE = ED thì ΔBED cân tại E
$\Rightarrow$ $EBD = EDB$
Mà $BDC = EDB$ (Cặp góc so le trong)
Suy ra : $BDC = DBE$ hay BD là đường phân giác của góc B
Vậy I là giao điểm ba đường phân giác của ΔABC
Thì BE = DE = DC.

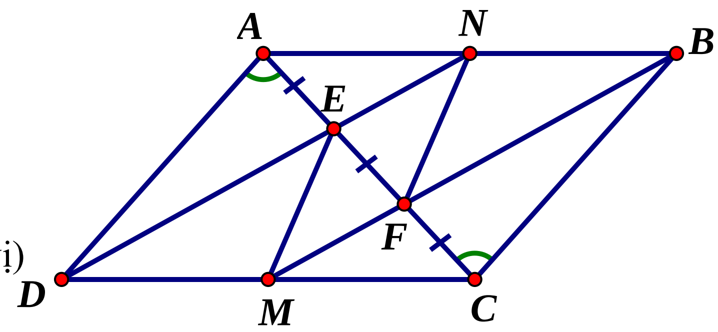
<u>BÀI 3</u> : Cho ΔABC, trên tia BA lấy D sao cho A là trung điểm BD. Trên tia CB lấy điểm E sao cho B là trung điểm CE. Hai đường thẳng AC và DE cắt nhau tại I. Chứng minh rằng: $DI = \dfrac{DE}{3}$



<u>Giải</u>: Qua B, vẽ BJ // AC; $J \in DE$
Xét ΔBDJ . Ta có :
AB = AD (gt)
IA // JB (vì BJ // AC)
Suy ra : ID = IJ (Định lí)
Tương tự : JB là đương trung bình của ΔCEI
Nên IJ = JE
Vậy DI = IJ = JE hay DI = $\dfrac{DE}{3}$

<u>BÀI 4</u>: Cho hình bình hành ABCD. Các điểm E, F thuộc đường chéo AC sao cho AE = EF = FC. Gọi M là giao điểm của BF và CD; N là giao điểm của DE và AB. Chứng minh rằng:

a. M, N theo thứ tự là trung điểm của CD, AB. b. EMFN là hình bình hành.



Giải: a) Xét ΔADE và ΔBCF :
AD = BC; $DAE = BCF$; AE = CF
Nên ΔADE = ΔBCF (c- g- c)
$\Rightarrow$) $AED = BFC$; DE = BF. (1)
Mà $AED = NEC$
Suy ra : $BFC = NEC$ (cặp góc đồng vị)
Nên DN // BM (dhnb)

Xét ΔDEC : EF = FC; MF // DE Suy ra : DM = MC

Hay MF là đường trung bình của ΔDEC nên MF // DE; $MF = \frac{DE}{2}$ (2)

+ Tương tự: EN là đường trung bình của ΔABF

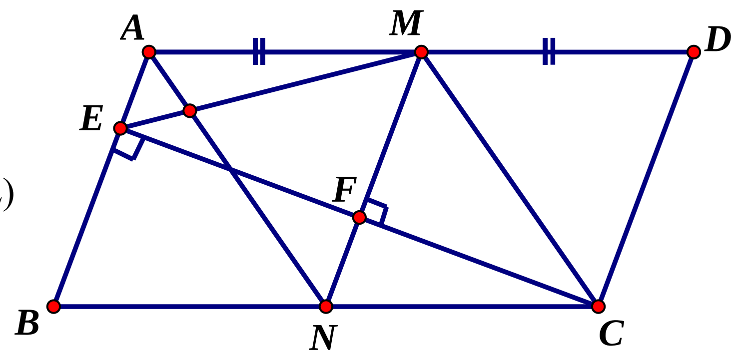
Nên AN = NB; $EN = \frac{BF}{2}$ (3)

Từ (1); (2) và (3), suy ra : EN = MF; EN // MF nên . EMFN là hình bình hành.

<u>BÀI 5</u>: Cho hình bình hành ABCD trong đó có AD = 2AB. Kẻ CE ⊥ AB. Gọi M là trung điểm của AD, nối EM, kẻ MF vuông góc với CE; MF cắt BC tại N.

a. Tứ giác MNCD là hình gì ? b. ∆EMC là tam giác gì ?

c. Chứng minh rằng: $BAD = 2AEM$



Giải:

a) Xét AECD : AE // CD (gt)

AM = MD (gt)

MF // AE (vì cùng vuông góc với CE)

Suy ra : EF = FC (đlí 3)

+ Xét ΔBCE : NF // BE (cm trên)

EF = FC

Suy ra : BN = NC.

Vậy MNCD : MD = NC = $\frac{AD}{2}$; MD // NC

Nên MNCD là hình bình hành (dhnb)

b) ΔEMC cân tại M

Vì MF vừa là đường cao, vừa là đường trung tuyến ứng với cạnh EC.

c) Ta có : $AEM = EMF$ (cặp góc soletrong)

$\Rightarrow$) $EMC = 2AEM$ (*)

Mặt khác : $CMN = MNA$ (cặp góc soletrong)

Mà $MNA = MAN$ (vì ΔAMN cân tại M)

$MNA = BAN$

Suy ra : $BAD = BAN + MAN = 2CMN = EMC$ (**)từ (*) và (**)

Ta có : $BAD = 2AEM$

<u>Bài 6</u>: Cho hình bình hành ABCD, hai đường chéo cắt nhau ở O. Hai đường thẳng d_1 và d_2 cùng đi qua O và vuông góc với nhau. Đường thẳng d_1 cắt các cạnh AB và CD ở M và P. Đường thẳng d_2 cắt các cạnh BC và AD ở N và Q.

a/ Chứng minh tứ giác MNPQ là hình thoi.

b/ Nếu ABCD là hình vuông thì tứ giác MNPQ là hình gì? Chứng minh.

a) Vì O là tâm đối xứng của hình bình hành

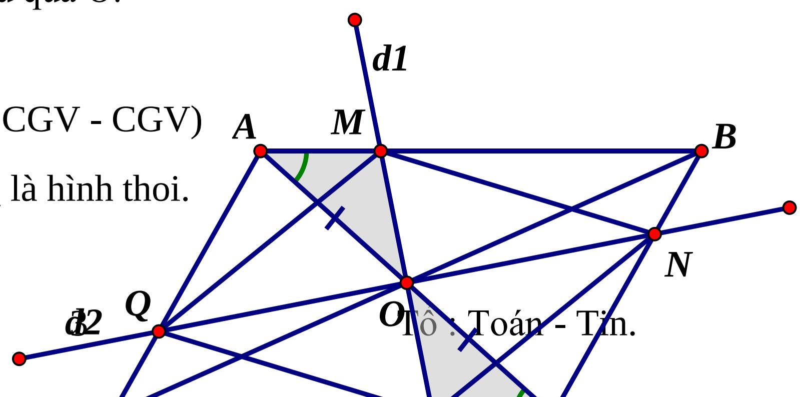
nên M và P; N và Q đối xứng với nhau qua O.

Suy ra : OM = OP; ON = OQ.

Nên $\Delta OMN = \Delta OPN = \Delta OPQ = \Delta OMQ$ (CGV - CGV)

$\Rightarrow$) $MN = NP = PQ = QM$ Hay MNPQ là hình thoi.

b) Nếu ABCD là hình vuông



thì MNPQ là hình vuông.

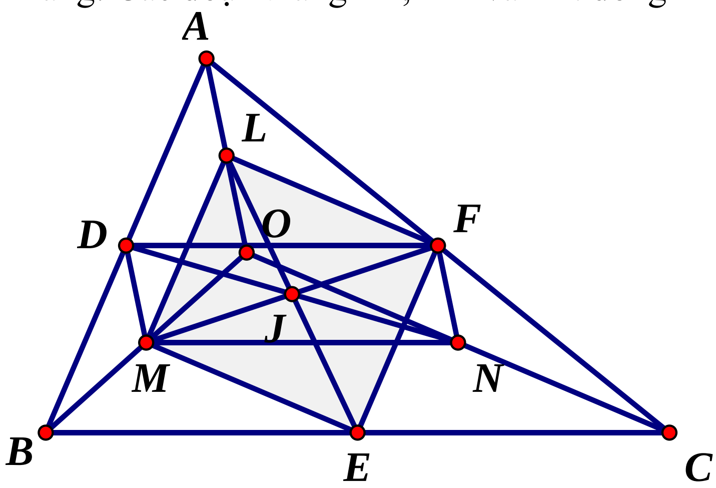
Vì $A = 90^0$ nên $AQM + AMQ = 90^0$

Mà $AQM = BMN$ Nên $BMN + AMQ = 90^0$

Suy ra : $QMN = 180^0 - \left(BMN + AMQ\right) = 180^0 - 90^0 = 90^0$

Nên MNPQ là hình vuông. (dhnb)

<u>BÀI 7</u>. Cho tam giác ABC và O là một điểm thuộc miền trong của tam giác. Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CA và L, M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn OA, OB, OC. Chứng minh rằng: Các đoạn thẳng EL, FM và DN đồng qui.



<u>Giải</u>: Xét DFNM . Ta có :

Vì DM là đường trung bình của ΔABO

Nên DM // AO; $DM = \frac{1}{2}AO$.

Tương tự : NF // AO; $NF = \frac{1}{2}AO$

Vậy DFNM là hình bình hành

Gọi $J = DN \cap MF$. Ta có :

J là trung điểm của DN và MF.

Chứng minh tương tự :

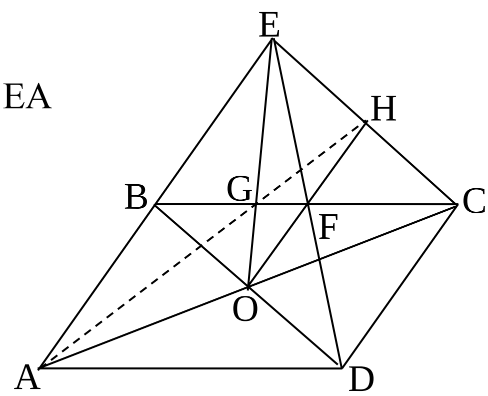
EFLM là hình bình hành nên J cũng là trung điểm chung của MF và LE

Hay EL, FM và DN đồng qui.

<u>Bài 8.</u> Cho hình bình hành ABCD. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo ; E là điểm đối xứng của A qua B ; F là giao điểm của BC và ED ; G là giao điểm của BC và OE ; H là giao điểm của EC và OF. Chứng minh rằng A, G, H thẳng hàng.

<u>Giải</u>: Vì O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD nên OA = OC

suy ra EO là trung tuyến của ΔEAC.



Vì E đối xứng với A qua B nên B là trung điểm của EA

suy ra CB là trung tuyến của ΔEAC.

Vì G là giao điểm của CB và EO

nên G là trọng tâm của ΔEAC. (1)

Mặt khác, ABCD là hình bình hành

nên CD // AB, CD = AB, mà B là trung điểm của AE

suy ra CD // BE, CD = BE.

Do đó BECD là hình bình hành.

Từ đó F là trung điểm của hai đường chéo ED và BC của hình bình hành BECD.

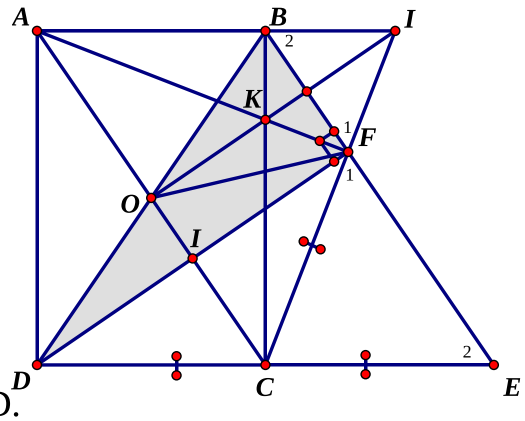
Ta có OF là đường trung bình của ΔCAB

nên OF // AB ⇒ OH // AE

⇒ HE = HC. Do đó AH là trung tuyến của ΔEAC. (2)

Từ (1) và (2) suy ra A, G, H thẳng hàng (đpcm).

<u>Bài 9</u>. Cho hình chữ nhật ABCD (AB < BC) có O là giao điểm của hai đường chéo. Trên tia đối của tia CD lấy điểm E sao cho CE = CD. Gọi F là hình chiếu của của D trên BE ; I là giao điểm của AB và CF ; K là giao điểm của AF và BC. Chứng minh rằng ba điểm O, K, I thẳng hàng



Vì ABCD là hình chữ nhật

nên AB = CD, AC = BD và OA = OB = OC = OD.

Ta có CB ⊥ AI (vì ABCD là hình chữ nhật)

⇒ CB là đường cao của ΔCAI. (1)

+ ΔFBD vuông tại F (vì F là hình chiếu của D lên BE)

có FO là trung tuyến ứng với cạnh huyền BD

nên OF = $\frac{1}{2}$BD ⇒ OF = $\frac{1}{2}$AC.

+ ΔFAC có FO là đường trung tuyến ứng với cạnh AC

mà FO = $\frac{1}{2}$AC nên ΔFAC vuông tại F.

Suy ra AF ⊥ CI hay AF là đường cao của ΔCAI. (2)

+ K là giao điểm của AF và CB nên từ (1) và (2) suy ra K là trực tâm của ΔCAI.

Do đó IK ⊥ AC. (3)

Mặt khác, tứ giác ABEC có AB = CE (cùng bằng CD)

và AB // CE (vì AB // CD)

nên là hình bình hành

⇒ BE // AC ⇒ BF //AC ⇒ ABFC là hình thang.

Lại có ΔFDE vuông tại F, FC là trung tuyến ứng với cạnh DE (vì CD = CE)

nên CF = CD ⇒ CF = AB (vì AB = CD).

Suy ra $\triangle$BAC = $\triangle$FCA (cạnh huyền – cạnh góc vuông) $\Rightarrow$ AF = BC.

Hình thang ABFC có hai đường chéo AF và BC bằng nhau nên là hình thang cân. Suy ra $\widehat{IAC} = \widehat{ICA}$ $\Rightarrow \Delta$IAC cân tại I

$\Rightarrow$ IO là trung tuyến đồng thời là đường cao. Hay IO $\perp$ AC. (4)

Từ (3) và (4) suy ra I, K, O thẳng hàng (đpcm).

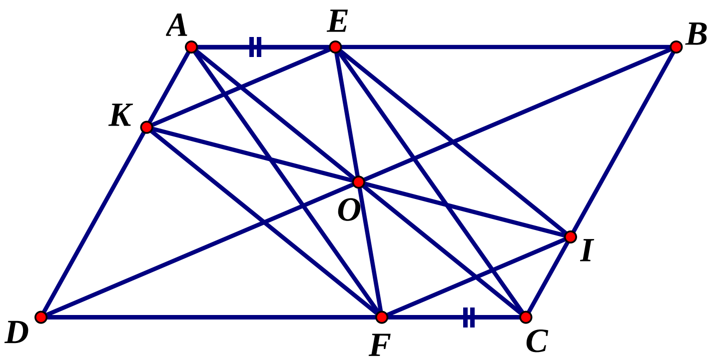
<u>Bài 10</u>: Cho hình bình hành ABCD. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Trên AB lấy điểm E, trên CD lấy điểm F sao cho AE = CF.

a. Chứng minh E đối xứng với F qua O

b. Từ E dựng Ex // AC cắt BC tại I, dựng Fy // AC cắt AD tại K.

Chứng minh rằng: EI = FK; I và K đối xứng với nhau qua O.

<u>Giải:</u>



a) Xét tứ giác AECF có :
AE = CF; AE // CF
Nên AECF là hình bình hành (dhnb)
Mà O là trung điểm của AC
Nên O cũng là trung điểm của EF
Vậy E và F đối xứng với nhau qua O.

b) Xét EIFK : EI // KF (cùng song song với AC)
Mặt khác : Xét ΔBEI và ΔDFK :
DF = EB (Vì AE = CF)

$EBI = FDK$ (Vì ABCD là hình bình hành)

+ $EIB = ACB$ (Cặp góc đồng vị)

+ $DKF = DAC$ (Cặp góc đồng vị)

Mà $ACB = DAC$ (Cặp góc soletrong)

Nên $EIB = DKF$

Suy ra : ΔBEI = ΔDFK (g - c - g)

$\Rightarrow$) EI = KF

Vậy EIFK là hình bình hành (dhnb)

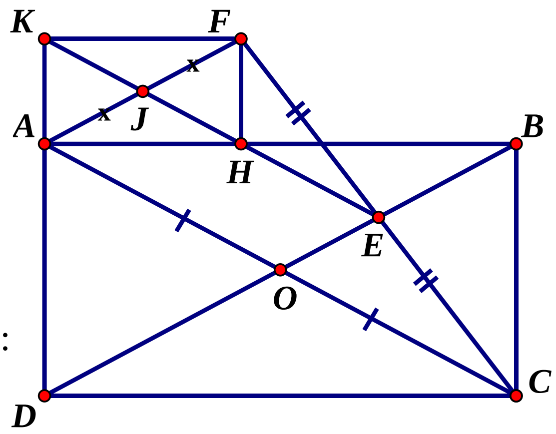
Suy ra : EI = FK và O là trung điểm của IK hay I và K đối xứng qua O.

<u>Bài 11</u>: Cho hình chữ nhật ABCD, nối C với một điểm E bất kỳ trên đường chéo BD, trên tia đối của EC lấy điểm F sao cho EF = EC. Vẽ FH và FK lần lượt vuông góc với AB và AD. Chứng minh rằng:

a) Tứ giác AHFK là hình chữ nhật

b) AF song song với BD và KH song song với AC

c) Ba điểm E, H, K thẳng hàng.



Giải:

a) Xét AHFK : $\widehat{A} = \widehat{H} = \widehat{K} = 90^0$
nên AHFK là hình chữ nhật.
b) * Xét ΔACF : OA = OC; EC = EF
nên OE là đường trung bình của ΔACF
nên OE // AF hay AF // BD.
* Tương tự : EJ là đường trung bình của ΔACF :
Nên EJ // AC
Mặt khác : ΔAKJ cân tại J

$\Rightarrow$) $\widehat{AKJ} = \widehat{KAJ}$

+ $\widehat{KAJ} = \widehat{KDE}$ (cặp góc đồng vị)

$\Rightarrow$)$\widehat{AKJ} = \widehat{KDE}$ hay ΔKDE cân

Suy ra : $\widehat{AJK} = \widehat{DEK} = \dfrac{180^0 - \widehat{KDE}}{2}$ nên K; J và E thẳng hàng.

Mà K; J và H thẳng hàng.
Nên K; H và E cũng thẳng hàng và HK // AC.

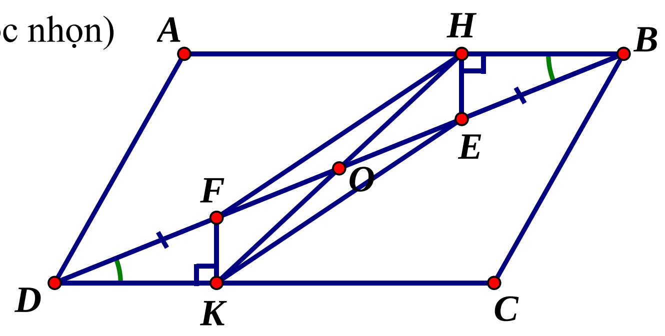
Bài tập 12. Cho hình bình hành ABCD. Trên đường chéo BD lấy hai điểm E và F sao cho BE = DF. Kẻ EH $\perp$ AB, FK $\perp$ CD (H $\in$ AB, K $\in$ CD). Gọi O là trung điểm của EF. Chứng minh rằng ba điểm H, O, K thẳng hàng.

GIẢI

Vì EH $\perp$ AB, FK $\perp$ CD và AB // CD nên EH // FK (1)

Xét Δ HBE và Δ KDF có BE = DF, $\widehat{KDF} = \widehat{HBE}$, $\widehat{DKF} = \widehat{BHE} = 90^0$

$\Rightarrow$ Δ HBE = Δ KDF (cạnh huyền – góc nhọn)



$\Rightarrow$ HE = KF (2)

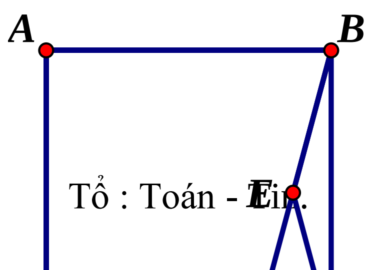
Từ (1) và (2)

suy ra HEKF là hình bình hành

$\Rightarrow$Vì O là trung điểm của EF

cũng là trung điểm của HK. Vậy O, H, K thẳng hàng (đpcm).

Bài tập 13: Trong hình vuông ABCD lấy điểm E sao cho $\widehat{EBC} = \widehat{ECB} = 15^0$. Trên nửa mặt phẳng bờ CD không chứa điểm E vẽ tam giác đều CDF. Chứng minh rằng B, E, F thẳng hàng.



GIẢI: Xét : $\Delta BEC : BEC = 180^0 - \left(EBC + ECB\right)$

= 180^0 - (15^0 + 15^0) = 150^0

$\Delta BCF : BCF = BCD + DCF = 90^0 + 60^0 = 150^0$

$\Rightarrow) BFC = 180^0 - \left(BCF + CBF\right) = 180^0 - \left(150^0 + 15^0\right) = 15^0$

(Hoặc $\Delta BCF : BC = CF$ (cùng bằng CD)

Nên ΔBCF cân tại C

$\Rightarrow) BFC = CBF = 15^0$;

$ECF = \left(90^0 - ECB\right) + DCF = \left(90^0 - 15^0\right) + 60^0 = 135^0$

Vậy $CEF = 180^0 - \left(CFB + ECF\right) = 180^0 - \left(15^0 + 135^0\right) = 30^0$

Ta có : $CEF + CEB = 180^0$ hay B, E, F thẳng hàng.

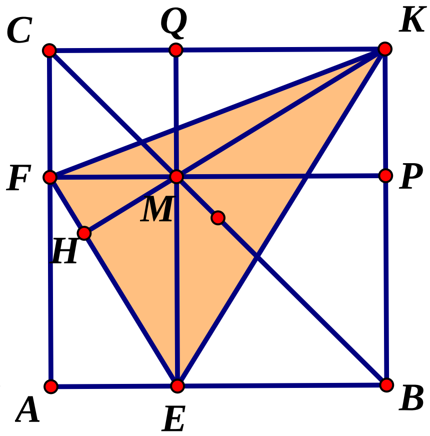
Bài tập 14: Cho tam giác ABC vuông cân tại A .Điểm M thuộc cạnh BC .Gọi E và F theo thứ tự là hình chiêu của M trên AB ,AC.Chứng minh rằng khi M chuyển động trên BC thì

a/ Chu vi của tứ giác MEAF không đổi .

b/Đường thẳng đi qua M và vuông góc với EF luôn đi qua điểm K cố định .

c/ Tam giác KEF có diện tích nhỏ nhất khi M là trung điểm của BC

Giải: a) Xét MEAFL : $A = E = F = 90^0$



Là hình chữ nhật.

$\Rightarrow) ME = AF; \quad MF = AE$

Mặt khác : ΔABC vuông cân

Nên ΔCFM vuông cân

$\Rightarrow) CF = FM = AE$

Nên Cvi MEAF = AE + EM + FM + AF

= 2(AF + FM) = 2(AF + FC)

= 2AC không đổi vì AC không đổi.

b) Gọi K là điểm đối xứng của A qua BC.

Vì ΔABC vuông cân nên AK cũng là đường trung trực của BC

Suy ra : ABKC là hình vuông.

Gọi $P = FM \cap BK$; $Q = ME \cap CK$; H là hình chiếu của M xuống EF.

Suy ra : + MPKQ là hình chữ nhật.

+ MFCQ; MEBP là hình vuông.

Xét ΔMFE và ΔKPM :

FM = KP (= MQ); ME = MP (2 cạnh của hình vuông MEBP); $\text{EMF} = P = 90^0$

Nên ΔMFE = ΔKPM (c - g - c)

Suy ra: $MEF = KMP$

Mặt khác : $MEF + EMH = 90^0$

Nên $MEF + EMH + EMP = 180^0$ hay M; H và K thẳng hàng.

Vậy HM luôn đi qua điểm K cố định hay đường thẳng đi qua M vuông góc với EF luôn đi qua điểm K cố định.

c) $S_{KEF} = S_{ABCD} - \left(S_{AEF} + S_{CKF} + S_{BEK}\right)$

mà $S_{CKF} + S_{BEK} = \frac{1}{2}\left(CK \cdot CF + KB \cdot EB\right) = \frac{1}{2}KB \cdot \left(EB + CF\right) = \frac{1}{2}KB \cdot AB = \frac{S_{ABCD}}{2}$

Vậy S_{KEF} nhỏ nhất khi S_{AEF} lớn nhất.

Mặt khác : $S_{AEF} = \frac{1}{2}AE \cdot \mathrm{AF}$ đạt giá trị lớn nhất khi AE = AF (bđthức Cô si)

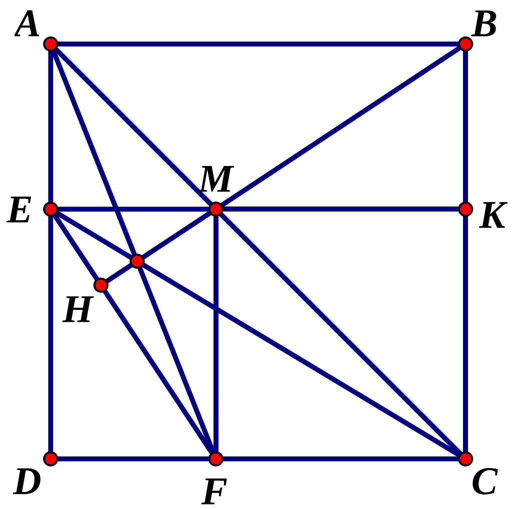
Hay Max $S_{AEF} = \frac{1}{2}AE \cdot \mathrm{AF} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AB}{2} \cdot \frac{AB}{2} = \frac{S_{ABCD}}{8}$

Nên Min $S_{KEF} = S_{ABCD} - \left(S_{AEF} + S_{CKF} + S_{BEK}\right) = S_{ABCD} - \left(\frac{S_{ABCD}}{2} + \frac{S_{ABCD}}{8}\right) = \frac{3S_{ABCD}}{8}$

Bài tập 15: Cho hình vuông ABCD, M $\in$ đương chéo AC. Gọi E,F theo thứ tự là hình chiếu của M trên AD, CD. Chứng minh rằng:

a) BM $\perp$ EF

b) Các đường thẳng BM, AF, CE đồng quy.



GIẢI : a) Tứ giác DEMF : $D = E = F = 90^0$

Là hình chữ nhật.

Xét $\Delta M\mathrm{EF}$ và ΔKBM : $K = M = 90^0$

EM = BK (vì ΔAEM vuông cân)

MF = MK (= KC)

Nên $\Delta M\mathrm{EF} = \Delta KBM$ (c - g - c)

$M\mathrm{EF} = MBK$

Mặt khác : $EMH = BMK$ (cặp góc đối đỉnh)

$MBK + BMK = 90^0$

Nên $M\mathrm{EF} + EMH = MBK + BMK = 90^0$

Vậy $EMH = 90^0$ hay $BM \perp \mathrm{EF}$.

b) Gọi $I = \mathrm{AF} \cap BE$; $J = CE \cap BF$

Ta có : $\Delta ADF = \Delta BAE$ (c - g - c)

$DAF = ABE$

$\Rightarrow) DAF + AEB = ABE + AEB = 90^0$

Nên $AIE = 90^0$ hay $FI \perp BE$

Tương tự : $\Delta DEC = \Delta CFB$

Suy ra : $EJ \perp BF$

Vậy BH; EJ và FI là ba đường cao của $\Delta B\mathrm{EF}$

Nên đồng quy tại 1 điểm.